

考虑二阶弯矩效应的自由扭转圆曲梁静力分析

王佳佳¹ 丁敏¹ 蒋秀根^{1*} 郭韦佟^{1,2} 邓婷¹ 王宏志¹

(1. 中国农业大学 水利与土木工程学院,北京 100083;

2. 交通运输部水运科学研究院 水路交通环保节能监测中心,北京 100088)

摘要 针对拱形温室结构在轴向风荷载作用下的受力变形及屋面荷载作用下平面外稳定问题,根据考虑曲梁的大位移特征及二阶弯矩效应,建立圆曲梁的弯矩平衡方程,结合其他平衡方程、几何方程、物理方程,获得非线性圆曲梁挠度和扭转角的控制方程,得到含系数的圆曲梁几何非线性位移、变形和内力模型,给出圆曲梁几何非线性位移及内力的计算方案。鉴于圆曲梁的受力变形与圆拱平面外失稳特征变形的相似性,在此研究的基础上,分析圆拱平面外失稳问题,给出圆拱平面外分岔失稳临界荷载的计算方法。分析结果表明:本研究得到的圆曲梁几何非线性静力分析模型,可用于拱形温室屋面结构的非线性受力分析及平面外分岔及极值点失稳计算。

关键词 圆曲梁; 圆拱; 二阶弯矩效应; 几何非线性; 静力分析

中图分类号 TU311.1;S26+3

文章编号 1007-4333(2019)03-0109-08

文献标志码 A

Static analysis of circular curved beam with free torsion considering second-order moment effect

WANG Jiajia¹, DING Min¹, JIANG Xiugen^{1*}, GUO Weitong^{1,2}, DENG Ting¹, WANG Hongzhi¹

(1. College of Water Resources and Civil Engineering, China Agricultural University, Beijing 100083, China;

2. Waterway Transportation Environmental Protection and Energy Saving Monitoring Center, China Waterborne Transport Research Institute, Beijing 100088, China)

Abstract Aiming at the problem of the behavior of arch greenhouse structure under longitudinal wind load and out-plane stability under roof load, a moment equilibrium equation of circular curved beam was established by taking large displacement and second-order moment effect into account. Combined with other equilibrium equation, geometric equation and physical equation, the deflection and torsion angle control equations of circular curved beam were obtained, respectively. Then the geometric nonlinear displacement, deformation and internal force models including coefficients of circular curved beam were received, and the calculation scheme for geometric nonlinear displacement and internal force of circular curved beam were also gained. Because the deformation of circular curved beam was similar to that of circular arch with out-plane buckling. On the above basis, the out-plane buckling of circular arch was analyzed and the calculation method for critical load of circular arch with out-plane bifurcation buckling was built. The analysis results showed that the geometric nonlinear static analysis model of circular curved beam by the study could be used to calculate the nonlinear behavior of arch greenhouse structure and the out-plane bifurcation buckling.

Keywords circular curved beam; circular arch; second-order moment effect; geometric nonlinearity; static analysis

温室是现代农业生产中应用最为广泛的设施之一^[1],由于拱结构具有良好的跨越性能,因此,拱形屋面温室常用于温棚、日光温室、连栋温室,是温室

中最常见的结构型式。

温室屋面承受的荷载包括竖向荷载(如自重、施工活荷载、雪荷载、横向风荷载等)和山墙传来的水

收稿日期: 2018-06-11

基金项目: 国家自然科学基金项目(11672362)

第一作者: 王佳佳, 硕士研究生, E-mail: wjj319@cau.edu.cn

通讯作者: 蒋秀根, 教授, 主要从事结构工程研究, E-mail: jiangxg@cau.edu.cn

平轴向风荷载。竖向荷载作用下,屋面结构承受压弯内力,产生面内压弯变形,可按拱结构分析其内力及变形;轴向水平荷载作用下,屋面结构承受弯扭内力,产生面外弯扭变形,可按曲梁结构分析其内力及变形^[2]。

对于曲梁的空间受力分析,一般采用小位移线性模型,将荷载分为面内荷载和面外荷载,面内荷载只在面内产生轴向和径向位移,即为传统意义上的拱结构^[3];面外荷载产生面外位移,即为传统意义上的曲梁结构^[4]。面内变形和面外变形相互独立、互不影响。

然而,对于像拱形温室屋面结构这样的截面较小的轻型结构,拱的长细比较大,在空间荷载作用下,结构面外变形、即曲梁弯曲挠度较大,在面内轴力的作用下,面外曲梁弯曲的二阶效应不能忽略,导致曲梁的面内外受力变形相互影响;更重要的是,拱的稳定失效是屋面承载力失效的主要形式^[5],而拱的平面外失稳是典型的曲梁弯扭变形。研究大位移条件下曲梁的内力和变形,对于准确分析拱形温室屋面结构的内力、变形及平面外承载力十分必要。

曲梁几何非线性分析一般有解析法和数值法。解析法包含静力法和能量法:静力法能解决简单曲梁结构与工况的位移及内力分析问题,且可以获得解析解,但对于复杂结构、复杂工况,静力法求解难度则比较大。已有研究^[5-7]采用静力法,建立了基于几何大变形的曲梁非线性模型,在求解时将平衡方程中改变平衡条件的内力视为常数来求解方程,此线性简化过程不能反映曲梁真实的受力变形特点。采用能量法进行曲梁几何非线性分析^[8-10]时,须引入满足曲梁边界的位移函数,此位移函数的选取为了满足分析的简便,通常存在主观性,并不能准确表达曲梁弯扭位移的根本特征,分析结果一般为近似解。数值法中最常用是有限元法,主要用来分析不同曲梁在各类荷载作用下的受力和变形,或将曲梁离散为直梁单元^[11-14],不能直接考虑曲梁受力的弯扭耦合;或采用多项式插值位移形函数构造曲梁单元^[15-18],但这类位移形函数与真实的曲梁位移有较大的差异,不能充分反映曲梁的受力变形特点。

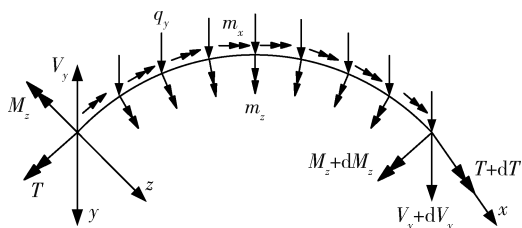
本研究拟针对拱形温室结构在轴向风荷载作用下的受力变形及屋面荷载作用下平面外稳定问题,考虑轴力产生的二阶弯矩与弯扭耦合特征,以期得到基于大位移的圆曲梁的位移和内力方程,并将其用于圆

曲梁非线性静力分析及圆拱平面外失稳分析。

1 基本模型

1.1 基本假定

为方便表达圆曲梁中各物理量,选取随动极坐标系(图1)。按照右手螺旋法则定义坐标系,轴向坐标 x 为圆曲梁轴线切向,向右为正; y 轴垂直于曲轴平面,法向向上为正; z 轴在曲轴平面内,垂直于轴线,径向,指向圆心为正;坐标零点位于拱左端。对于曲梁,其外力包括: x 方向和 z 方向的分布力矩分别为 m_x 和 m_z , y 方向的均布力 q_y ; 内力包括:平面外弯矩 M_z , 总扭矩 T , 剪力 V_y , 当截面外法线方向与坐标轴方向一致时,内力定义为与坐标轴方向一致为正;当截面外法线方向与坐标轴正向相反时,内力定义为与坐标轴方向相反为负。



x, y, z 分别为曲梁轴线方向, 竖直方向和径向; m_x, m_z 为分布力矩; q_y 为分布力; M_z, T 分别为平面外弯矩和总扭矩; V_y 为剪力。

x, y and z are axis directions of the curved beam, vertical directions and radial directions; m_x, m_z are uniformly distributed bending moment; q_y is uniformly distributed force; M_z and T are out-plane bending moment and total torque; V_y is vertical shear force.

图1 圆曲梁坐标系及受力分析

Fig. 1 Coordinate of circular curved beam

本研究分析基于以下基本假定:

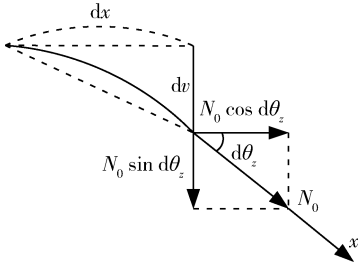
- 1) 等曲率平曲梁。曲梁轴线为平面圆弧, 半径为 r 、扇角为 ϕ 、轴向长度为 l , 且 $l = \phi r$ 。
- 2) 细长杆。采用 Euler-Bernoulli 弯曲理论计算截面的弯曲应力和弯曲变形, 忽略梁内剪切变形。
- 3) 等截面。变截面时, 可将变截面圆曲梁结构划分或简化为若干个等截面圆曲梁或曲梁段。
- 4) 自由扭转。只考虑圣维南自由扭转, 不考虑圆曲梁的扭转截面翘曲, 不考虑截面扭转的翘曲变形以及由此带来的翘曲应力。
- 5) 大位移小变形。考虑结构变形对平衡条件的影响, 即考虑轴力在挠度上对截面产生的二阶弯矩, 采用线性弯曲曲率模型。
- 6) 线弹性变形。曲梁的刚度为常数, 曲梁的内

力与变形成正比。

1.2 基本方程

曲梁的位移控制方程建立在平衡方程、几何方程、物理方程的基础上。

与小位移曲梁模型不同,本研究模型考虑了曲梁梁内轴力对面外弯曲的二阶弯矩。轴力的二阶弯矩 ΔM 由 2 部分组成:轴力在面内的分量与挠度增量的乘积,轴力在面外的分量与微段长度的乘积(图 2)。



N_0 为受均布径向荷载下圆曲梁的轴力; dx 、 dv 和 $d\theta_z$ 分别为曲梁微段长度,挠度增量和转角增量。

N_0 is the axial force of the curved beam under uniformly distributed radial load; dx , dv and $d\theta_z$ are micro length of the curved beam, increment of deflection and increment of angular displacements, respectively.

图 2 曲梁微段轴力分解

Fig. 2 Axial force breakdown diagram of the micro section

轴力的二阶弯矩 ΔM 的计算过程如下:

1) 面内轴力分量与挠度增量乘积。

$$\Delta M_{\text{面内}} = -N_0 \cos d\theta_z \cdot dv \quad (1)$$

式中: $\Delta M_{\text{面内}}$ 为面内二阶弯矩分量; N_0 受均布径向荷载下圆曲梁的轴力 $N_0 = -q_x r$, dx , dv , $d\theta_z$ 分别为曲梁微段长度,挠度增量和转角增量。

2) 面外轴力分量与微段长度的乘积。

$$\Delta M_{\text{面外}} = N_0 \sin d\theta_z \cdot 2r \sin \frac{dx}{2r} \quad (2)$$

式中: $\Delta M_{\text{面外}}$ 为面外二阶弯矩分量。

在曲梁微段上,当 dx 足够小时, $\cos d\theta_z \approx 1$,

$\sin d\theta_z \approx d\theta_z$, $\sin \frac{dx}{2r} \approx \frac{dx}{2r}$; 式(1)可变化为:

$$\Delta M_{\text{面内}} = -N_0 \cos d\theta_z \cdot dv \approx -N_0 dv$$

式(2)可变化为:

$$\begin{aligned} \Delta M_{\text{面外}} &= N_0 \sin d\theta_z \cdot 2r \sin \frac{dx}{2r} \approx \\ N_0 d\theta_z \cdot 2r \frac{dx}{2r} &= N_0 d\theta_z \cdot dx \end{aligned} \quad (3)$$

式中, $d\theta_z \cdot dx$ 为二阶微量,则 $d\theta_z \cdot dx \approx 0$, 因此

$$\Delta M_{\text{面外}} \approx 0.$$

综上,轴力的二阶弯矩为: $\Delta M = -N_0 dv$ 。其他基本方程仍采用与小位移模型相同的平衡方程^[4]。

2 位移控制方程

综合曲梁的基本方程,可以得到圆曲梁位移控制方程。

1) 挠度控制方程:

$$\begin{aligned} \frac{d^6 v}{dx^6} + \frac{1}{r^2} (2 - \lambda) \frac{d^4 v}{dx^4} + \frac{1}{r^4} (1 + \lambda \eta) \frac{d^2 v}{dx^2} = \\ \frac{1}{EI_z} \left[-\frac{d^3 m_z}{dx^3} + \frac{(1 + \eta)}{r} \frac{d^2 m_x}{dx^2} + \right. \\ \left. \frac{\eta}{r^2} \frac{dm_x}{dx} - \frac{\eta}{r^2} q_y + \frac{d^2 q_y}{dx^2} \right] \end{aligned} \quad (4)$$

式中: r 为曲梁半径; v 为曲梁的平面外挠度; E 为材料弹性模量; G 为材料的剪切模量; I_z 为截面绕 z 轴的惯性矩; I_d 为截面绕 x 轴的抗扭惯性矩; λ 为轴力特征值, $\lambda = \frac{N_0 r^2}{EI_z}$; η 为抗扭刚度比, $\eta = \frac{EI_z}{GI_d}$ 。

2) 扭转角控制方程:

$$\begin{aligned} \theta_x = -\frac{r^3 GI_d}{EI_z + GI_d} \frac{d^4 v}{dx^4} + \\ \left[\frac{r GI_d (GI_d + r^2 N_0)}{EI_z (EI_z + GI_d)} - \frac{r (EI_z + GI_d)}{EI_z} \right] \frac{d^2 v}{dx^2} + \\ \frac{r^3 GI_d}{EI_z (EI_z + GI_d)} q_y - \frac{r^3 GI_d}{EI_z (EI_z + GI_d)} \frac{dm_z}{dx} + \frac{r^2}{EI_z} m_x \end{aligned} \quad (5)$$

式中: θ_x 为截面扭转角。

3 圆曲梁位移、变形与内力

3.1 位移

3.1.1 一般格式

1) 平面外挠度。由式(4)可以求得:

$$v = v_h + v_p \quad (6)$$

式中: v_h 为平面外挠度通解, v_p 为平面外挠度特解。分别为:

$$\begin{aligned} v_h &= d_1 + d_2 x + d_3 e^{\alpha x} + d_4 e^{-\alpha x} + d_5 e^{\beta x} + d_6 e^{-\beta x} \\ v_p &= v_p(q_y) + v_p(m_x) + v_p(m_z) \end{aligned}$$

式中: $d_1 \sim d_6$ 为常系数; $\alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\lambda - 4\lambda\eta} + \lambda - 2}{2}}$;

$$\beta = \sqrt{-\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\lambda - 4\lambda\eta} - \lambda + 2}{2}}; v_p(q_y) = -\frac{\eta}{1 + \lambda\eta} \cdot$$

$$\frac{r^2}{EI_z} \int q_y dx + \frac{1}{1 + \lambda\eta} \frac{r^4}{EI_z} q_y, v_p(m_x) = \frac{1 + \eta}{1 + \lambda\eta} \cdot$$

$$\frac{r^3}{EI_z} m_x + \frac{\eta}{1 + \lambda\eta} \frac{r^2}{EI_z} \int m_x dx, v_p(m_z) = -\frac{1}{1 + \lambda\eta} \frac{r^4}{EI_z} \cdot \frac{dm_z}{dx}。$$

2) 扭转角。综合式(5)和(6)得:

$$\theta_x = \theta_{x,h} + \theta_{x,p} \quad (7)$$

式中: $\theta_{x,h}$ 为扭转角通解, $\theta_{x,p}$ 为扭转角特解, 分别为

$$\theta_{x,h} = d_3 \frac{\xi_1}{r} e^{\frac{x}{r}} + d_4 \frac{\xi_1}{r} e^{-\frac{x}{r}} + d_5 \frac{\xi_2}{r} e^{\beta \frac{x}{r}} + d_6 \frac{\xi_2}{r} e^{-\beta \frac{x}{r}}$$

$$\theta_{x,p} = \theta_{x,p}(q_y) + \theta_{x,p}(m_x) + \theta_{x,p}(m_z)$$

式中: ξ_1 和 ξ_2 为曲梁扭转角参数(表1); $\theta_{x,p}(q_y)$ 、 $\theta_{x,p}(m_x)$ 、 $\theta_{x,p}(m_z)$ 的计算公式为:

$$\theta_{x,p}(q_y) = \frac{1 + \eta}{1 + \lambda\eta} \frac{q_y r^3}{EI_z} + \frac{\lambda - 2}{1 + \lambda\eta} \frac{1}{\eta + 1} \frac{r^5}{EI_z} \frac{d^2 q_y}{dx^2} - \frac{1}{\eta + 1} \frac{1}{1 + \lambda\eta} \frac{r^7}{EI_z} \frac{d^4 q_y}{dx^4}$$

$$\theta_{x,p}(m_x) = \frac{r^2}{EI_z} m_x + \frac{\lambda - \eta - 2}{\eta + 1} \frac{\eta}{1 + \lambda\eta} \frac{r^3}{EI_z} \frac{dm_x}{dx} + \frac{\lambda - \eta - 2}{1 + \lambda\eta} \frac{r^4}{EI_z} \frac{d^2 m_x}{dx^2} -$$

$$\frac{1}{\eta + 1} \frac{\eta}{1 + \lambda\eta} \frac{r^5}{EI_z} \frac{d^3 m_x}{dx^3} -$$

$$\frac{1}{1 + \lambda\eta} \frac{r^6}{EI_z} \frac{d^4 m_x}{dx^4}$$

$$\theta_{x,p}(m_z) = -\frac{r^3}{\eta + 1} \frac{1}{EI_z} \frac{dm_z}{dx} - \frac{\lambda - \eta - 2}{\eta + 1}$$

$$\frac{1}{1 + \lambda\eta} \frac{r^5}{EI_z} \frac{d^3 m_z}{dx^3} +$$

$$\frac{1}{\eta + 1} \frac{1}{1 + \lambda\eta} \frac{r^7}{EI_z} \frac{d^5 m_z}{dx^5}$$

3.1.2 简化格式

根据荷载范围, 确定化简后的位移方程见表1。

3.2 变形及内力

根据圆曲梁几何方程式, 结合圆曲梁位移, 可分别求得圆曲梁的弯曲转角、弯曲曲率及扭率。

根据圆曲梁的物理方程式, 结合圆曲梁变形, 可分别求得圆曲梁的扭矩及弯矩。利用圆曲梁的平衡方程, 得到圆曲梁剪力^[2]:

$$V_y = -\frac{dM_z}{dx} - \frac{T}{r} + N_0 \frac{dv}{dx} - m_z \quad (8)$$

4 圆曲梁内力计算方法与步骤

根据圆曲梁的位移、变形及内力方程, 结合圆曲梁的边界条件, 可首先求得位移系数, 将位移系数代入位移及内力公式, 可得到圆曲梁截面位移及内力

模型。

4.1 边界条件

圆曲梁位移系数的边界条件可根据圆曲梁支座特性确定。常见的圆曲梁支座及其边界条件见表2。

4.2 位移系数

根据截面位移计算公式及定解条件, 可得到圆曲梁位移系数定解方程:

$$\mathbf{A} \mathbf{d} + \boldsymbol{\delta}_q = \boldsymbol{\delta}^e \quad (9)$$

式中: \mathbf{A} 为根据圆曲梁2个支座 $x=0$ 和 $x=l$ 处的边界条件, 由给定位置的位移或变形方程的基函数所组成的矩阵; $\boldsymbol{\delta}_q$ 为支座处对应的位移或变形的特解向量; $\boldsymbol{\delta}^e$ 为圆曲梁支座位移或变形向量; \mathbf{d} 为位移系数矩阵, $\mathbf{d} = \{d_1 \ d_2 \ d_3 \ d_4 \ d_5 \ d_6\}$ 。

由定解方程, 可得到位移系数 \mathbf{d} 为:

$$\mathbf{d} = \mathbf{A}^{-1} \boldsymbol{\delta}^e - \mathbf{A}^{-1} \boldsymbol{\delta}_q \quad (10)$$

5 应用与算例

5.1 两端铰支圆拱平面外分岔分析

采用本研究考虑大位移的圆曲梁位移模型, 进行无矩圆拱在均布径向力 $q_z = q$ 作用下的平面外分岔失稳分析, 此时, $N_0 = -rq$, $q_y = m_x = m_z = 0$ 。

5.1.1 边界条件

两端铰支圆拱在面外的支座约束属于两端夹支, 边界条件为: $x=0$ 时, $v(0) = 0, \theta_x(0) = 0, \kappa_z(0) = 0$; $x=l=r\theta$ 时, $v(l) = 0, \theta_x(l) = 0, \kappa_z(l) = 0$ 。

圆拱面外支座条件分别采用圆曲梁低压力、高压下的位移方程和变形方程中的通解部分, 可得:

$$\{v_h(0) \ \theta_{x,h}(0) \ \kappa_{z,h}(0) \ v_h(l) \ \theta_{x,h}(l) \ \kappa_{z,h}(l)\}^T = \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\}^T \quad (11)$$

式(10)可化简为:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{d} = 0 \quad (12)$$

5.1.2 特征方程

对于分岔失稳, 齐次方程有非零解的条件是, 位移系数矩阵行列式为0, 即

$$|\mathbf{A}| = 0 \quad (13)$$

5.1.3 临界荷载

分别对低压力和高压下状态下, 圆拱平面外分岔失稳特征方程进行化简, 得到简化的特征方程, 并进一步求得特征值(表3)。可知, 两端铰支圆拱在低压力或高压下工况下, 面外分岔失稳的最小特征值均为:

表 1 不同工况下圆曲梁位移方程

Table 1 Displacement equation of the circular curved beam under different working conditions

工况 Working condition	λ	位移通解		位移特解		参数	
		General solution	Special solution	α, β	ξ_1, ξ_2		
高压力 High compression	$\lambda < -\frac{1}{\eta}$	$v_h = d_1 + d_2 x + d_3 \sinh\left(\frac{\alpha}{r} x\right) + d_4 \cosh\left(\frac{\alpha}{r} x\right) + d_5 \sin\left(\frac{\beta}{r} x\right) + d_6 \cos\left(\frac{\beta}{r} x\right)$ $\theta_{x,h} = d_3 \frac{\xi_1}{r} \sinh\left(\frac{\alpha}{r} x\right) + d_4 \frac{\xi_1}{r} \cosh\left(\frac{\alpha}{r} x\right) + d_5 \frac{\xi_2}{r} \sin\left(\frac{\beta}{r} x\right) + d_6 \frac{\xi_2}{r} \cos\left(\frac{\beta}{r} x\right)$	v_{h1} $\theta_{x, h1}$	$\alpha = \sqrt{-\frac{\Delta_2}{2}}$ $\beta = \sqrt{-\frac{\Delta_3}{2}}$	$\xi_1 = \frac{(1+\lambda\eta)-\alpha^2\eta}{(\eta+1)}$ $\xi_2 = \frac{(1+\lambda\eta)+\beta^2\eta}{(\eta+1)}$		
界限压力 Boundary compression	$\lambda = -\frac{1}{\eta}$	$v_h = d_1 + d_2 x + d_3 x^2 + d_4 x^3 + d_5 \sin\left(\frac{\beta}{r} x\right) + d_6 \cos\left(\frac{\beta}{r} x\right)$ $\theta_{x,h} = -2 \frac{r(\eta+1)}{\eta} d_3 - 6 \frac{r(\eta+1)}{\eta} d_4 x + \frac{1+2\eta}{\eta+1} \frac{d_5}{r} \sin\left(\frac{\beta}{r} x\right) + \frac{1+2\eta}{\eta+1} \frac{d_6}{r} \cos\left(\frac{\beta}{r} x\right)$	v_{h2} $\theta_{x, h2}$	$\alpha = 0$ $\beta = \sqrt{\frac{1}{\eta} + 2}$			
低压力 Low compression	$-\frac{1}{\eta} < \lambda < 0$	$v_h = d_1 + d_2 x + d_3 \sin\left(\frac{\alpha}{r} x\right) + d_4 \cos\left(\frac{\alpha}{r} x\right) + d_5 \sin\left(\frac{\beta}{r} x\right) + d_6 \cos\left(\frac{\beta}{r} x\right)$ $\theta_{x,h} = d_3 \frac{\xi_1}{r} \sin\left(\frac{\alpha}{r} x\right) + d_4 \frac{\xi_1}{r} \cos\left(\frac{\alpha}{r} x\right) + d_5 \frac{\xi_2}{r} \sin\left(\frac{\beta}{r} x\right) + d_6 \frac{\xi_2}{r} \cos\left(\frac{\beta}{r} x\right)$	v_{h1} $\theta_{x, h1}$	$\alpha = \sqrt{-\frac{\Delta_2}{2}}$ $\beta = \sqrt{-\frac{\Delta_3}{2}}$	$\xi_1 = \frac{(1+\lambda\eta)+\alpha^2\eta}{(\eta+1)}$ $\xi_2 = \frac{(1+\lambda\eta)+\beta^2\eta}{(\eta+1)}$		
零轴力 Zero axial compression	$\lambda = 0$	$v_h = d_1 + d_2 x + d_3 \sin \frac{x}{r} + d_4 \cos \frac{x}{r} + d_5 x \sin \frac{x}{r} + d_6 x \cos \frac{x}{r}$ $\theta_{x,h} = d_3 \frac{1}{r} \sin \frac{x}{r} + d_4 \frac{1}{r} \cos \frac{x}{r} + d_5 \left(\frac{x}{r} \sin \frac{x}{r} - \frac{2\eta}{\eta+1} \cos \frac{x}{r} \right) + d_6 \left(\frac{x}{r} \cos \frac{x}{r} + \frac{2\eta}{\eta+1} \sin \frac{x}{r} \right)$	v_{h1} $\theta_{x, h1}$	$\alpha = \pm i$ $\beta = \pm i$			
低拉力 Low tension	$0 < \lambda < 4(1+\eta)$	无					
高拉力 High tension	$\lambda \geq 4(1+\eta)$	$v_h = d_1 + d_2 x + d_3 \sin\left(\frac{\alpha}{r} x\right) + d_4 \cos\left(\frac{\alpha}{r} x\right) + d_5 \sinh\left(\frac{\beta}{r} x\right) + d_6 \cosh\left(\frac{\beta}{r} x\right)$ $\theta_{x,h} = d_3 \frac{\xi_1}{r} \sin\left(\frac{\alpha}{r} x\right) + d_4 \frac{\xi_1}{r} \cos\left(\frac{\alpha}{r} x\right) + d_5 \frac{\xi_2}{r} \sinh\left(\frac{\beta}{r} x\right) + d_6 \frac{\xi_2}{r} \cosh\left(\frac{\beta}{r} x\right)$	v_{h1} $\theta_{x, h1}$	$\alpha = \sqrt{-\frac{\Delta_2}{2}}$ $\beta = \sqrt{-\frac{\Delta_3}{2}}$	$\xi_1 = \frac{(1+\lambda\eta)+\alpha^2\eta}{(\eta+1)}$ $\xi_2 = \frac{(1+\lambda\eta)-\beta^2\eta}{(\eta+1)}$		

注： $\Delta_1 = \lambda^2 - 4\lambda - 4\eta, \Delta_2 = \sqrt{\Delta_1} + \lambda - 2, \Delta_3 = \sqrt{\Delta_1} - \lambda + 2$

$$v_{p1} = -\frac{\eta}{1+\lambda\eta} \frac{r^2}{EI_z} \iint_{x_0}^x q_y dx + \frac{1}{1+\lambda\eta} \frac{r^4}{EI_z} q_y + \frac{\eta}{1+\lambda\eta} \frac{r^2}{EI_z} \int m_x dx + \frac{1}{1+\lambda\eta} \frac{r^3}{EI_z} m_x - \frac{1}{1+\lambda\eta} \frac{r^4}{EI_z} \frac{dm_z}{dx}$$

$$v_{p2} = -\frac{\eta^2}{2\eta+1} \frac{1}{EI_z} \iint_{x_0}^x \iint_{x_0}^x q_y dx dx - \frac{\eta}{2\eta+1} \frac{r^2}{EI_z} \int m_x dx + \frac{\eta^2}{2\eta+1} \frac{r^2}{EI_z} \iint_{x_0}^x m_x dx + \frac{(1+\eta)\eta}{2\eta+1} \frac{r}{EI_z} \iint_{x_0}^x m_x dx$$

$$\theta_{x, p1} = \frac{1+\eta}{1+\lambda\eta} \frac{r^5}{EI_z} \frac{d^3 q_y}{dx^3} + \frac{\lambda-2}{1+\lambda\eta} \frac{1}{\eta+1} \frac{r^6}{EI_z} \frac{d^4 q_y}{dx^4} - \frac{1}{\eta+1} \frac{r^7}{EI_z} \frac{d^5 q_y}{dx^5} - \frac{1}{\eta+1} \frac{r^5}{EI_z} \frac{d^3 m_x}{dx^3} - \frac{1}{\eta+1} \frac{r^6}{EI_z} \frac{d^4 m_x}{dx^4} - \frac{1}{\eta+1} \frac{r^7}{EI_z} \frac{d^5 m_x}{dx^5} - \frac{1}{\eta+1} \frac{r^5}{EI_z} \frac{d^3 m_z}{dx^3} - \frac{1}{\eta+1} \frac{r^6}{EI_z} \frac{d^4 m_z}{dx^4} - \frac{1}{\eta+1} \frac{r^7}{EI_z} \frac{d^5 m_z}{dx^5}$$

$$\theta_{x, p2} = \frac{(\eta+1)\eta}{2\eta+1} \frac{r}{EI_z} \iint_{x_0}^x q_y dx - \frac{\eta}{(2\eta+1)(\eta+1)} \frac{r^5}{EI_z} \frac{d^2 q_y}{dx^2} - \frac{(\eta+1)\eta}{2\eta+1} \frac{r}{EI_z} \int m_x dx - \frac{\eta^2}{(2\eta+1)(\eta+1)} \frac{r^3}{EI_z} \frac{dm_x}{dx} - \frac{\eta}{2\eta+1} \frac{r^4}{EI_z} \frac{d^2 m_x}{dx^2} + \frac{\eta^2}{(2\eta+1)(\eta+1)} \frac{r^5}{EI_z} \frac{d^3 m_x}{dx^3} - \frac{r^5}{(2\eta+1)(\eta+1)} \frac{d^3 m_z}{dx^3}$$

表2 圆曲梁支座及边界条件

Table 2 Support and boundary conditions of circular curved beam

边界条件 Boundary condition	固支 Fixed support	夹支 Clamped support	锁支 Locked support	自由 Free end
几何边界条件 Geometric boundary condition	$v = 0$ $\theta_x = 0$ $\theta_z = 0$	$v = 0$ $\theta_x = 0$	$v = 0$ $\theta_z = 0$	—
自然边界条件 Physical boundary condition	—	$\kappa_z = 0$	$\kappa_x = 0$	$\kappa_x = 0$ $\kappa_z = 0$ $V_y = 0$

注: v 为曲梁平面外挠度; κ_x 和 κ_z 分别为截面绕 x 轴和 z 轴的曲率; θ_x 和 θ_z 分别为节点绕 x 轴和 z 轴的转角; V_y 为截面剪力。

Note: v is out-plane deflection of the curved beam; κ_x and κ_z are the curvature around x axis and z axis; θ_x and θ_z are angular displacements around x axis and z axis; V_y is vertical shear force.

$$\lambda = - \left[\left(\frac{\pi}{\theta} \right)^2 - 1 \right]^2 / \left[\eta + \left(\frac{\pi}{\theta} \right)^2 \right]$$

式中: $\lambda = \frac{N_0 r^2}{EI_z}$, $\eta = \frac{EI_z}{GI_d}$, $N_0 = -qr$, 由此可得临界荷载为:

$$q_{cr} = \frac{EI_z}{r^3} \frac{\left[\left(\frac{\pi}{\theta} \right)^2 - 1 \right]^2}{\eta + \left(\frac{\pi}{\theta} \right)^2}$$

显然, 圆拱平面外分岔失稳荷载与曲梁面外抗弯刚

度 EI_z 、弯扭刚度比 η 、曲梁扇角 ϕ 、曲梁半径 r 等参数有关。

对比可知, 由本研究模型求得的两端铰支圆拱平面外分岔失稳的临界荷载与文献[6]和[7]完全相同; 不同的是文献[6]和[7]中引入了大变形的概念建立了拱平面外的剪力平衡方程, 但采用了小变形的弯曲曲率模型; 而本研究模型采用大位移、小变形模型, 考虑了轴力的二阶弯矩效应, 采用线性曲率模型, 模型的一致性更合理。

表3 圆拱平面外分岔失稳特征方程和特征值

Table 3 Characteristic equation and eigenvalue of circular arch with out-plane bifurcation buckling

工况 Working condition	特征方程 Characteristic equation	最小特征值 Minimum eigenvalue
低压力 High compression	$-\theta(\alpha^2 \zeta_2 - \beta^2 \zeta_1)^2 \sin(\alpha\theta) \sin(\beta\theta) = 0$	$\lambda = - \left[\left(\frac{\pi}{\theta} \right)^2 - 1 \right]^2 / \left[\eta + \left(\frac{\pi}{\theta} \right)^2 \right]$
高压力 Low compression	$-\theta(\alpha^2 \zeta_2 + \beta^2 \zeta_1)^2 \sinh(\alpha\theta) \sin(\beta\theta) = 0$	$\lambda = - \left[\left(\frac{\pi}{\theta} \right)^2 - 1 \right]^2 / \left[\eta + \left(\frac{\pi}{\theta} \right)^2 \right]$

5.2 考虑大位移的圆曲梁非线性位移

为研究圆曲梁轴力对弯曲挠度的影响, 对两端固支、受均布径向荷载和均布竖向荷载的半圆形曲梁进行分析。算例中曲梁直径为 10 m, 扇角为 $\phi = 180^\circ$, 弯扭刚度比为 $\eta = 1$ 。曲梁跨中挠度随荷载的变化见图 3、图 4 和图 5。

圆曲梁径向荷载的存在不改变圆曲梁荷载位移曲线的线性特征; 径向荷载对圆曲梁弯曲挠度的影

响不能忽略(图 3); 径向荷载越大, 圆曲梁的刚度呈线性规律减小(图 4)。对于本算例, 零轴力时, 名义刚度为 0.089 76, 当轴力特征值为 2.0 时, 名义刚度降低了 80.00%。原因是, 圆曲梁的面内荷载只产生轴力和面内压弯变形, 面外荷载只产生面外弯曲挠度和扭曲变形, 但面内荷载产生的轴力增加了面外弯曲的弯矩、从而导致弯曲刚度减小。

面外荷载一定时, 圆曲梁挠度随着径向荷载的

增加而增加,且呈非线性关系增加(图5),径向荷载的最大值恰好与圆拱的平面外分岔失稳临界荷载相

同,这是典型的圆拱平面外失稳问题。这说明了本研究提出的模型属于圆曲梁几何非线性问题,既可以用于圆曲梁的几何非线性位移分析,也可以用于圆拱的平面外稳定分析。

6 结束语

本研究考虑大位移几何非线性的影响,建立了圆曲梁的平衡方程,推导出关于挠度及扭角的位移控制方程,给出了各种荷载组合作用下的,含待定系数的圆曲梁非线性位移、变形及内力方程,待定位移系数个数与圆曲梁自由度数相同;同时给出了考虑大位移影响的曲梁非线性位移及内力计算求解方案。

利用本研究提出的模型,根据圆曲梁的几何边界条件,对两端铰支圆拱进行分析,建立了圆拱平面外分岔失稳的特征方程,得到了圆拱的平面外分岔失稳临界荷载;分析表明,采用本研究得到的大位移圆曲梁模型,可以得到面内荷载作用下挠度随着荷载的增加而呈现的位移非线性发展至极值点失稳过程;极值失稳荷载为圆拱的分岔失稳荷载。

参考文献 References

[1] 周长吉,王应宽. 中国现代温室的主要型式及其性能[J]. 农业工程学报, 2001, 17(1): 16-21
 Zhou C J, Wang Y K. Modern greenhouses and their performances in China[J]. *Transactions of the Chinese Society of Agricultural Engineering*, 2001, 17(1): 16-21 (in Chinese)

[2] 姚玲森. 曲线梁[M]. 北京: 人民交通出版社, 1989
 Yao L S. *Curved Beam* [M]. Beijing: China Communications Press, 1989 (in Chinese)

[3] 郭韦佟,丁敏,邓婷,蒋秀根,王斌泰,黄泽敏. 圆拱结构静力分析的直接刚度法[J]. 广西大学学报: 自然科学版, 2017, 42(4): 1351-1360
 Guo W T, Ding M, Deng T, Jiang X G, Wang B T, Huang Z M. Direct stiffness model for static analysis of circular arch structure[J]. *Journal of Guangxi University: Natural Science Edition*, 2017, 42(4): 1351-1360 (in Chinese)

[4] 郭韦佟,朱丹,宓林,蒋秀根. 拱形屋面温室纵向抗风分析中的曲梁刚度矩阵模型[J]. 中国农业大学学报, 2017, 22(10): 113-119
 Guo W T, Zhu D, Mi L, Jiang X G. Curved beam stiffness matrix model for longitudinal wind resistance analysis of arch roof greenhouse [J]. *Journal of China Agricultural University*, 2017, 22(10): 113-119 (in Chinese)

[5] 郭彦林, 窦超. 现代拱形钢结构设计原理与应用[M]. 北京: 科学出版社, 2013

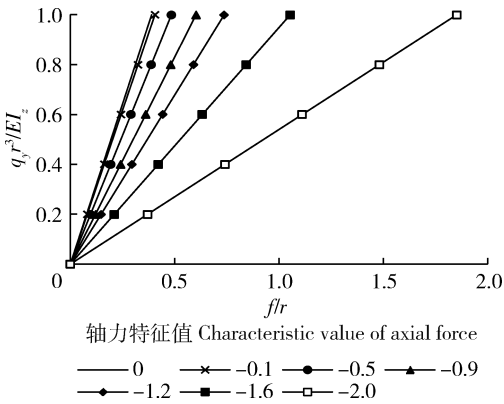


图3 不同均布径向荷载作用下跨中挠度与竖向荷载关系

Fig. 3 The relationship between mid-span deflection and vertical load under different uniformly distributed radial loads

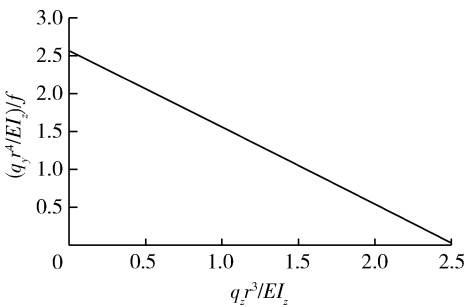


图4 圆曲梁跨中相对位移随径向荷载变化

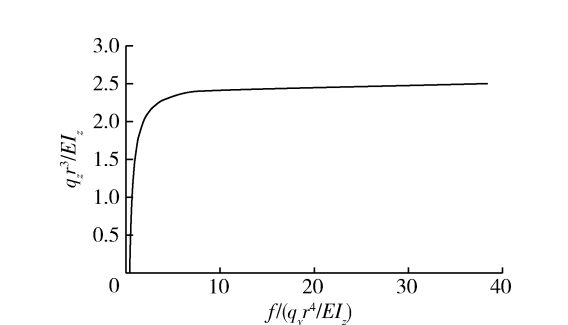


图5 跨中挠度与径向荷载关系

Fig. 5 The relationship between mid-span deflection and radial load

- Guo Y L, Dou C. *Design Fundamentals and Application of Contemporary Steel Arch Structures* [M]. Beijing: Science Press, 2013 (in Chinese)
- [6] 铁摩辛柯 S P, 盖莱 J M. 弹性稳定理论[M]. 2 版. 北京: 科学出版社, 1965
Timoshenko S P, Gere J M. *Theory of Elastic Stability*[M]. The second edition. Beijing: Science Press, 1965 (in Chinese)
- [7] 项海帆, 刘光栋. 拱结构的稳定与振动[M]. 北京: 人民交通出版社, 1991
Xiang H F, Liu G D. *Stability and Vibration of Arch Structures*[M]. Beijing: China Communications Press, 1991 (in Chinese)
- [8] Yoo C H. Flexural-torsional stability of curved beams[J]. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 1982, 108(6): 1351-1369
- [9] Yoo C H, Pfeiffer P A. Elastic stability of curved members[J]. *Journal of Structural Engineering*, 1983, 109(12): 2922-2940
- [10] Yoo C H, Pfeiffer P A. Buckling of curved beams with in-plane deformation[J]. *Journal of Structural Engineering*, 1984, 110(2): 291-300
- [11] Rajasekaran S, Ramm E. Discussion of "Flexural-torsional stability of curved beams" by Chai Hong Yoo[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 1984, 110(1): 144-148
- [12] Yoo C H. Closure to 'Flexural-torsional stability of curved beams' [J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 1984, 110(1): 148-149
- [13] Yang Y, Kuo S, Yau J. Use of straight beam approach to study buckling of curved beams [J]. *Journal of Structural Engineering*, 1991, 117(7): 1963-1978
- [14] 刘磊, 许克宾. 曲杆结构非线性分析中的直梁单元和曲梁单元[J]. 铁道学报, 2001, 23(6): 72-76
Liu L, Xu K B. Curved-beam element and straight-beam element used in the nonlinear analysis of curved frame structures[J]. *Journal of the China Railway Society*, 2001, 23(6): 72-76 (in Chinese)
- [15] Yang Y, Kuo S, Cheng Y D. Curved beam elements for nonlinear analysis [J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 1989, 115(4): 840-855
- [16] Wen R K. Nonlinear curved-beam element for arch structures [J]. *Journal of Structural Engineering*, 1991, 117(11): 3496-3515
- [17] 许强. 薄壁曲梁弹性理论和弹塑性稳定极限承载力分析[D]. 杭州: 浙江大学, 2002
Xu Q. Linearelastic theory and ultimate load carrying capacity analysis of thin-walled curved beams[D]. Hangzhou: Zhejiang University, 2002 (in Chinese)
- [18] 童根树, 许强. 工字形截面圆弧曲梁的非线性理论[J]. 土木工程学报, 2004, 37(4): 1-7
Tong G S, Xu Q. Nonlinear theory for round curving beams with I-sections[J]. *China Civil Engineering Journal*, 2004, 37(4): 1-7 (in Chinese)

责任编辑: 刘迎春