

基于部分交互作用理论的钢-混凝土组合梁弹性挠度分析

张庆霞 孟石平 蒋秀根

(中国农业大学 水利与土木工程学院, 北京 100083)

摘要 为分析钢-混凝土组合梁界面滑移对组合梁变形的影响,基于 Euler-Bernoulli 梁弹性弯曲理论和钢-混凝土组合梁部分交互作用理论,建立了钢-混凝土组合梁受力时截面内力、界面滑移和弯曲变形控制微分方程;得出了组合梁界面滑移、截面内力和弯曲挠度的一般方程,给出了各种工况下考虑界面滑移时的组合梁挠度方程和跨中挠度系数,并与其他模型进行对比验证。结果表明:本研究得到的组合梁跨中挠度方程与现有模型相比在理论上更为严密,所得结果更为安全。

关键词 钢-混凝土组合梁; 界面滑移; 挠度; 弹性; 弯曲变形

中图分类号 TU 311.1

文章编号 1007-4333(2007)05-0086-05

文献标识码 A

Elastic deflection analysis of steel-concrete composite beam based on partial-interaction theory

Zhang Qingxia, Meng Shiping, Jiang Xiugen

(College of Water Conservancy and Civil Engineering, China Agricultural University, Beijing 100083, China)

Abstract The control differential equations for analysis of the cross section innerforce, the interface slip and bending deformation of a steel-concrete composite beam were established based on the Euler-Bernoulli beam model and partial-interaction theory to analyze the effect of the interface slip. The general equations of interface slip, cross section inner forces and flexure deformation were build up and the deflection formulas of steel-concrete composite beams under various loads were obtained, which were compared with those from other models.

Key words steel-concrete composite beam; inter-surface slip; deflection; elasticity; bending deformation

钢-混凝土组合梁由型钢和钢筋混凝土板组成,是在钢梁-混凝土板迭合梁结构基础上发展起来的用于受弯的一种钢-混凝土组合结构^[1-3]。型钢通常位于截面的弯拉区,承受弯矩产生的拉应力,钢筋混凝土板位于截面的弯压区。

由于充分利用了钢材的抗拉性能和钢筋混凝土的受压性能,钢-混凝土组合梁比钢梁和钢筋混凝土梁具有更高的承载力和刚度:混凝土位于受压区,充分利用了混凝土的抗压强度,避免了混凝土受拉开裂带来的承载力和刚度的下降;钢筋混凝土板位于可能出现的型钢受压区翼缘,提高了型钢的弯扭稳定性,避免了钢梁的弯扭失稳,充分利用了钢材的抗拉强度。

理论研究和工程实践表明,在跨度和承受荷载相同的情况下,与钢筋混凝土梁相比,钢-混凝土组合梁可以降低结构高度 1/3 ~ 1/4,减轻自重 40% ~ 60%,缩短施工周期 1/2 ~ 1/3;与钢梁相比,钢-混凝土组合梁可以降低结构高度 1/3 ~ 1/4,增大刚度 1/3 ~ 1/4^[2]。因此,钢-混凝土组合梁可广泛应用于大跨、重载土木工程结构中。

与迭合梁不同的是,组合梁的界面不能自由滑移,因而具有整体梁共同工作属性;其界面滑移的存在,又决定了其承载力和刚度低于相同截面的整体梁的承载力和刚度。在考虑界面滑移的前提下,正确分析组合梁的承载力和刚度是保证其安全性和适用性的基础。许多学者对钢-混凝土组合梁的界面

收稿日期: 2007-05-11

作者简介: 张庆霞,讲师,硕士研究生, E-mail: cyzqx@sina.com; 蒋秀根,教授,通讯作者,主要从事结构工程研究, E-mail: jiangxg@cau.edu.cn

滑移、滑移对组合梁性能的影响进行了研究^[1-2]，但由于问题的复杂性，各种模型都存在一定的简化，与试验结果存在较大误差。

在讨论钢-混凝土组合梁界面滑移机理及其影响的基础上，本研究着重研究界面滑移对组合梁变形的影响，并给出考虑界面滑移效应的钢-混凝土组合梁挠度计算公式。

1 控制微分方程

1.1 基本思想

计算组合界面滑移的主要方法主要有“部分交互作用理论”^[4-9]和“整体-局部弯曲模型”^[10-11]。本研究采用“部分交互作用理论”计算组合梁的界面滑移及其效应。其基本思想可归纳为：选取组合梁任意微段为分析对象，将微段中钢梁与混凝土板分开考虑；分析微段上钢梁和混凝土板的所有力，包括荷载（作用与混凝土板顶面）、截面内力（轴力、剪力、弯矩）、界面应力（纵向剪应力、挤压力）；利用平衡条件，分别对微段钢梁和微段混凝土建立平衡方程；利用刚度条件，分别建立微段钢梁界面处的拉伸应变、微段混凝土板界面处的压缩应变和连接件的滑移应变方程；利用变形协调条件，建立界面滑移应变与钢梁及混凝土界面处正应变的相关方程；简化方程组，得到界面滑移变形微分方程；针对荷载工况和边界条件，求解组合梁界面滑移微分方程，得到界面滑移公式。

1.2 基本方程

以任意微段为分析单元，单元中的各力见图 1。

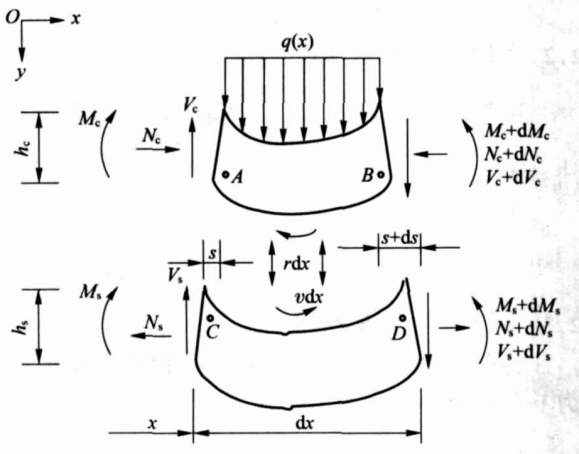


图 1 钢-混凝土组合梁单元体模型

Fig. 1 Unit model for steel-concrete composite beams

1) 平衡方程。由单元平衡条件，可写出钢梁的

平衡方程为

$$dM_s - V_s dx - \frac{1}{2} h_s dx + \frac{x}{2} (dx)^2 = 0$$

$$\frac{dN_c}{dx} = -$$

其中： M_s 、 V_s 、 N_c 分别为任意位置截面的钢梁弯矩、钢梁剪力和混凝土板轴力； g 为界面单位长度的剪力和挤压力； h_s 为钢梁高度。同样，可以写出混凝土板的平衡方程

$$dM_c - V_c dx - \frac{1}{2} h_c dx - \frac{x}{2} (dx)^2 + q(x) \frac{(dx)^2}{2} = 0$$

$$\frac{dN_s}{dx} = -$$

其中： M_c 、 V_c 、 N_s 分别为任意位置 x 截面的混凝土板的弯矩、混凝土板的剪力和钢梁轴力； $q(x)$ 为梁顶分布荷载值； h_c 为混凝土板厚度。对于抗剪连接件，可以写出其平衡方程为

$$V_L = u$$

其中： V_L 为连接件剪力； u 为连接件间距。组合梁的平衡方程为

$$M = M_c + M_s + N_c \left[\frac{h_c}{2} + \frac{h_s}{2} \right]$$

$$V = V_c + V_s$$

$$N_c = N_s$$

其中 M 和 V 分别为组合梁截面弯矩和截面剪力。

2) 刚度方程。混凝土板截面为压弯组合受力，混凝土界面处的拉应变为

$$\epsilon_c = \frac{M_c h_c}{E_c I_c 2} - \frac{N_c}{E_c A_c}$$

其中： ϵ_c 为界面处混凝土应变（拉为正）； E_c 、 I_c 、 A_c 分别为混凝土弹性模量、混凝土板的截面惯性矩和截面面积， $E_c I_c$ 和 $E_c A_c$ 为混凝土板截面抗弯、抗压刚度。同理，可以写出界面处钢梁的应变为

$$\epsilon_s = - \frac{M_s h_s}{E_s I_s 2} + \frac{N_s}{E_s A_s}$$

其中： ϵ_s 为界面处钢梁应变（拉为正）； E_s 、 I_s 、 A_s 分别为钢材弹性模量、钢梁的截面惯性矩和截面面积， $E_s I_s$ 、 $E_s A_s$ 为钢梁截面抗弯、抗压刚度。界面抗剪连接件滑移应变可由连接件刚度方程求得

$$s = \frac{V_L}{k}$$

其中： s 为连接件滑移； k 为连接件抗滑移刚度。

3) 变形协调方程。不考虑混凝土板与钢梁的掀起效应，有

$$\frac{M_c}{E_c I_c} = \frac{M_s}{E_s I_s}$$

界面滑移与界面处混凝土板及钢梁的应变服从条件

$$\frac{ds}{dx} = s - c$$

1.3 滑移方程

将平衡方程、刚度方程、变形协调方程简化,得到界面滑移(微分)方程

$$\frac{d^2 s}{dx^2} - \lambda^2 s = V \tag{1}$$

其中: $\lambda^2 = \frac{k}{u} \left(\frac{1}{EA} + \frac{h^2}{4EI} \right)$; $\lambda = \frac{h}{2EI}$, $h = h_c + h_s$ 。

1.4 组合梁截面内力

1) 界面纵向剪应力。由抗剪连接件刚度方程 $u = ks$ 可得

$$u = \frac{ks}{u} \tag{2}$$

2) 混凝土板及钢梁轴力。由隔离体纵向平衡条件 $\frac{dN_c}{dx} = -\frac{dN_s}{dx} = \frac{dN}{dx}$, 有 $\frac{dN}{dx} = -\frac{ks}{u}$, 可得混凝土板及钢梁的轴力为

$$N = -\frac{k}{u} \int_0^x s dx \tag{3}$$

3) 钢梁及混凝土板弯矩。由隔离体力矩平衡, $M_c + M_s = M - Nd_c = M + d_c \int_0^x \frac{k}{u} s dx$ 及变形协调条件 $\frac{M_c}{E_c I_c} = \frac{M_s}{E_s I_s}$, 可得到混凝土板的弯矩

$$M_c = g_c \left(M + e_c \int_0^x s dx \right) \tag{4}$$

其中: $g_c = g E_c I_c$, $g = \frac{1}{E_s I_s + E_c I_c}$, $e_c = \frac{d_c k}{u}$, $d_c = \frac{h}{2}$ 。钢梁弯矩为

$$M_s = g_s \left(M + e_c \int_0^x s dx \right) \tag{5}$$

其中 $g_s = g E_s I_s$ 。

1.5 弹性抗弯承载力

1) 钢梁最大拉应力。依据材料力学原理得钢梁最大应力为

$$\sigma_s(x) = e_1 \left(M(x) + e_c \int_0^x s dx \right) + e_s \int_0^x s dx \tag{6}$$

其中: $e_1 = \frac{g_s}{W_s}$, $e_s = -\frac{k}{u A_s}$ 。

2) 组合梁承载力。对任一截面, 当 $s = f$ 时可

得到截面承载力为

$$M_e(x) = \left[f - (e_1 e_c + e_s) \int_0^x s dx \right] \frac{1}{e_1} \tag{7}$$

1.6 弯曲挠度方程

1) 弯曲曲率。由梁的弯曲刚度方程 $E I \frac{d^2 y}{dx^2} =$

$\frac{M_c}{E_c I_c} = \frac{M_s}{E_s I_s}$, 有 $\frac{M_c + M_s}{E_c I_c + E_s I_s}$, 即

$$\frac{M + d_c \int_0^x \frac{k}{u} s dx}{E_s I_s + E_c I_c} = g_c M + g_c e_c \int_0^x s dx \tag{8}$$

2) 挠度曲线一般方程。由梁截面曲率定义及式(8), 可以得到梁的挠度曲率方程

$$y(x) = \iint \frac{d^2 y}{dx^2} dx dx = \iint \left[g_c M + g_c e_c \int_0^x s dx \right] dx dx = \iint g_c M(x) dx dx + g_c e_c \iint \left(\int_0^x s dx \right) dx dx \tag{9}$$

确定挠度曲线的边界条件是跨中挠度最大, $x = 0$, $\frac{dy}{dx} = 0$; 支座挠度为 0, $x = \frac{L}{2}$, $y = 0$ 。

2 各种工况下组合梁的滑移公式

2.1 均布荷载作用

将截面剪力 $V = -qx$ 代入式(1)并引进边界条件 $x = 0, s = 0$ 和 $x = \frac{L}{2}, s = 0$, 得

$$s = \frac{q(e^{-x} - e^{-\frac{L}{2} - x})}{3(e^{\frac{L}{2}} + e^{-\frac{L}{2}})} - \frac{q}{2} x \tag{10}$$

2.2 跨中集中荷载作用

将截面剪力 $V = -\frac{P}{2}$ 代入式(1)并引进边界条件 $x = 0, s = 0$ 和 $x = \frac{L}{2}, s = 0$, 可得

$$s = \frac{P(e^{-x-\frac{L}{2}} + e^{-x+\frac{L}{2}})}{2^2(e^{\frac{L}{2}} + e^{-\frac{L}{2}})} - \frac{P}{2^2} \tag{11}$$

2.3 对称集中荷载作用

将剪弯段截面剪力 $V = -p$ 和纯弯段截面剪力 $V = 0$ 分别代入式(1)并引进边界条件 $x = l_0, s_1 = s_2, x = 0$ 和 $x = \frac{L}{2}, s = 0$, 得

纯弯段

$$s_1 = \frac{P(e^{l_0-l} - e^{-l-l_0})}{2^2(1 + e^{-l})} (e^x - e^{-x}) \tag{12}$$



剪弯段

$$s_2 = \frac{P(e^{-l_0} + e^{-l})}{2^2(1 + e^{-l})} (e^{x-l} + e^{-x}) - \frac{P}{2} \quad (13)$$

3 各种工况下组合梁的挠度公式

3.1 均布荷载作用下的简支组合梁

1) 梁的挠度曲线方程。将梁截面弯矩 $M(x) = \frac{ql^2}{8} - \frac{qx^2}{2}$ 和式(10)代入式(9),通过积分运算,代入边界条件 $x=0, f=0; x=\frac{l}{2}, f=0$, 得

$$f = b_1 x^2 + b_2 x^4 + b_3(e^x + e^{-x}) + b_4 \quad (14)$$

其中: $b_1 = \left[A_1 l^2 + A_2 \left(\frac{l^2}{8} - \frac{1}{2} \right) \right] q, b_2 = - [A_3 + A_4] q, b_3 = A_5 q, b_4 = A_6 q (l^2 - 8) - A_7 ql^4 - A_8 ql^4; A_1 = \frac{1}{16} g_c, A_2 = 8A_1 B_1, A_3 = \frac{2}{3} A_1, A_4 = \frac{1}{12} A_2, A_5 = 16A_1 B_2 C_1, A_6 = 2A_1 B_2, A_7 = \frac{5}{24} A_1 B_1, A_8 = \frac{5}{24} A_1; B_1 = E_2 - 2, B_2 = \frac{B_1}{4}; C_1 = \frac{1}{e^2 + e^{-2}}$ 。

2) 梁的跨中挠度。将 $x=0$ 代入式(14)可得

$$f_{\max} = 2b_3 + b_4 \quad (15)$$

3.2 跨中集中荷载作用下的简支组合梁

1) 梁的挠度曲线方程。将梁截面弯矩 $M(x) = \frac{P}{2} \left(\frac{l}{2} - x \right)$ 和式(11)代入式(9),通过积分运算,代入边界条件 $x=0, f=0; x=\frac{l}{2}, f=0$, 可得

$$f = c_1 P \left[e^{x-\frac{l}{2}} - e^{-x+\frac{l}{2}} \right] + c_2 Px^3 + c_3 Px^2 + c_4 Px + c_5 \quad (16)$$

其中: $c_1 = 8B_1 C_1 \frac{1}{3}, c_2 = \frac{4}{3} A_1 (1 - B_1), c_3 = 2A_1 (B_1 - 1) l, c_4 = -8B_2 A_1, c_5 = \frac{l^3}{3} A_1 + 4B_1 A_1 l \left[\frac{1}{2} - \frac{l^2}{12} \right]$

2) 梁的跨中挠度。将 $x=0$ 代入式(16)得

$$f_{\max} = c_1 P \left[e^{-\frac{l}{2}} - e^{-\frac{l}{2}} \right] + c_5$$

3.3 对称集中荷载作用下的简支组合梁

1) 弯剪段挠度方程。将梁截面弯剪段弯矩 $M(x) = \frac{P}{2} \left(\frac{l}{2} - x \right)$ 和式(12)代入式(9),通过积分运算,代入边界条件 $x=l_0, f_1=f_2; x=0, f_2=0; x=$

$\frac{l}{2}, f_1=0; x=l_0, f_1=f_2$, 可得

$$f_1 = d_1 (e^{x-l_0} - e^{-x}) - d_2 x^2 + d_3 x^3 + d_4 x + d_5 \quad (17)$$

其中: $C_2 = \frac{e^{l+l_0} + e^{l-l_0}}{1 + e^l}, C_3 = \frac{e^{2l_0} + e^{L-2l_0}}{1 + e^l}$,

$d_1 = -8 \frac{B_1}{3} C_2 A_1 p, d_2 = 4A_1 (1 - B_1) pl, d_3 = \frac{8}{3} A_1 p (1 - B_1), d_4 = 16B_2 A_1 C_3 - 16B_1 A_1 Pl l_0 + 8A_1 Pl_0^2 (1 + 3B_1), d_5 = \frac{2}{3} A_1 pl^3 (1 - B_1) - 8A_1 B_2 C_3 + 8A_1 B_1 Pl^2 l_0 - 4A_1 Pl_0^2 l (1 + 3B_1)$

2) 纯弯段挠度方程。将梁截面纯弯段弯矩 $M(x) = p \left[\frac{l}{2} - l_0 \right]$ 和式(13)代入式(9),通过积分运算,代入边界条件 $x=l_0, f_1=f_2; x=0, f_2=0; x=\frac{l}{2}, f_1=0; x=l_0, f_1=f_2$, 可得

$$f_2 = D_3 (e^x + e^{-x}) - D_4 x^2 + D_5 \quad (18)$$

其中 $D_1 = \frac{e^{l-l_0} - e^{-l_0}}{1 + e^l}, D_2 = \frac{e^{2l_0} - e^l}{1 + e^l} + \frac{1 - e^{l-2l_0}}{1 + e^l}, D_3 = -8A_1 \frac{B_1}{3} D_1 P, D_4 = 8A_1 P \left[\frac{l}{2} - l_0 \right] (1 + B_1), D_5 = D_6 + D_7 + D_8, D_6 = D_2 8A_1 B_2 C_3 Pl_0 - 16A_1 \frac{B_1}{3} D_2 p, D_7 = -4A_1 pl l_0^2 (1 + 5B_1) + \frac{8}{3} A_1 pl_0^3 (1 + 5B_1), D_8 = \frac{2}{3} A_1 pl^3 (1 - B_1) + 8A_1 B_1 Pl^2 l_0$

3) 梁的跨中挠度。将 $x=0$ 代入式(18)可得到

$$f_{\max} = 16A_1 (F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5) P \quad (19)$$

其中: $F_1 = \frac{1}{2} B_2 C_3 D_2 l_0, F_2 = -\frac{B_1}{3} (D_1 + D_2), F_3 = -(1 + 5B_2) \frac{l_0^2}{2} \left[\frac{l}{2} - \frac{l_0}{3} \right], F_4 = \frac{l^3}{24} (1 - B_1), F_5 = \frac{1}{2} B_1 l^2 l_0$

以承受均布荷载 q 作用的简支组合梁为例,组合梁基本参数见表 1。按照本研究、文献[2]及规范[12]所给公式计算最大挠度,分别为 0.188 2, 0.113 8 和 0.139 6, 本研究与规范建议值的相对偏差为 25.8%。通过计算比较可见,按本研究公式计算的跨中挠度值,比按文献[2]和规范中简化公式计算的结果大,本研究公式计算的跨中挠度值更偏于安全。

表1 钢-混凝土组合梁基本参数

Table 1 Parameters of steel-concrete composite beam

b_c / mm	u / mm	E_c / GPa	A_c / mm^2	I_c / (10^4mm^4)	E_s / GPa	A_s / (10^4mm^2)	I_s / mm^4	h / mm	k / (N/mm)	L / mm
800	148	210	3 550	2 370	30.9	10	1.3×10^8	325	7.11×10^4	3.84×10^3

注： b_c 为混凝土板等效宽度； k 为栓钉刚度； L 为简支组合梁跨度； h 为组合梁截面高度；其他参数见文中注释。

4 结 论

1) 钢-混凝土组合梁界面必然存在滑移, 界面滑移降低了钢-混凝土组合梁的整体工作性能。

2) 采用弹性分析方法计算界面滑移及其对组合梁承载力和刚度的影响可满足一般工程设计需要。

3) 基于“部分交互作用理论”, 本研究建立了组合梁截面内力和弯曲变形分析模型及计算公式; 给出的钢-混凝土组合梁跨中挠度计算公式可较好地满足工程分析要求。

参 考 文 献

- [1] Johnson R P. Composite structures of steel and concrete, Vol. 1: Beams, columns, frames and applications in buildings [M]. 3rd Ed. Oxford: Blackwell Scientific, 2004: 35-39, 214-217
- [2] 聂建国. 钢-混凝土组合结构-试验、理论与应用[M]. 北京: 科学出版社, 2005: 57-62
- [3] 李兵兵. 钢-混凝土组合梁的应用与研究[J]. 工程论坛, 中国科技信息, 2005(11): 146-147
- [4] 聂建国. 钢-混凝土组合梁强度、变形和裂缝的研究[D]. 北京: 清华大学, 1994
- [5] 聂建国, 沈聚敏, 袁彦声. 钢-混凝土简支组合梁变形计算的一般公式[J]. 工程力学, 1994, 11(1): 21-27
- [6] 聂建国, 沈聚敏, 余志武. 考虑滑移效应的钢-混凝土梁变形计算的折减刚度法[J]. 土木工程学报, 1995, 28(6): 11-17
- [7] 聂建国, 崔玉萍, 石中柱. 部分剪力连接钢-混凝土组合梁受弯极限承载力的计算[J]. 工程力学, 2000, 17(3): 37-42
- [8] 聂建国, 刘明. 钢-混凝土组合结构[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2005: 59-60, 100-104
- [9] 王连广. 钢与混凝土组合结构理论与计算[M]. 北京: 科学出版社, 2005: 110-113
- [10] 蒋秀根, 剧锦三, 傅向荣. 考虑滑移效应的钢-混凝土组合梁弹性应力计算[J]. 工程力学, 2007, 24(1): 143-146
- [11] 孟石平, 蒋秀根, 剧锦三. 均布荷载作用下钢-混凝土组合梁界面滑移近似计算及其效应分析[J]. 中国农业大学学报, 2007, 12(1): 85-89
- [12] GB50017—2003 钢结构设计规范[S]. 北京: 中国计划出版社, 2003: 116-119