中国农业大学学报 2007,12(1):95-98
Journal of China Agricultural University

具有变号非线性项的二阶三点微分方程组的边值问题的2组正解

江卫华[1] 陈 静[2] 郭彦平[1]
(1. 河北科技大学 理学院,石家庄 050018;2. 中国农业大学 理学院,北京 100083)

摘 要 利用双锥上的不动点定理,并赋予 f,g 一定的增长条件,证明了二阶三点微分方程组的边值问题

$$\begin{cases} x''+f(t,x,y)=0 & 0\le t\le 1 \\ y''+g(t,x,y)=0 & 0\le t\le 1 \\ x(0)-\beta_1 x'(0)=0 \quad x(1)=\alpha_1 x(\eta_1) & 0<\eta_1<1 \\ y(0)-\beta_2 y'(0)=0 \quad y(1)=\alpha_2 y(\eta_2) & 0<\eta_2<1 \end{cases}$$

至少存在2组正解,其中 $f,g:[0,1]\times R^+\times R^+\to R$ 是连续的且可以变号。

关键词 三点边值问题;Green函数;双锥上的不动点定理;正解
中图分类号 O175.8 **文章编号** 1007-4333(2007)01-0095-04 **文献标识码** A

Two positive solutions to a second-order and three-point boundary value problem with sign changing nonlinear term

Jiang Weihua[1], Chen Jing[2], Guo Yanping[1]
(1. College of Sciences, Hebei University of Science and Technology, Shijiazhuang 050018, China;
2. College of Science, China Agricultural University, Beijing 100083, China)

Abstract For a second-order and three-point boundary value problem as follows:

$$\begin{cases} x''+f(t,x,y)=0 & 0\le t\le 1 \\ y''+g(t,x,y)=0 & 0\le t\le 1 \\ x(0)-\beta_1 x'(0)=0 \quad x(1)=\alpha_1 x(\eta_1) & 0<\eta_1<1 \\ y(0)-\beta_2 y'(0)=0 \quad y(1)=\alpha_2 y(\eta_2) & 0<\eta_2<1 \end{cases}$$

where $f,g:[0,1]\times R^+\times R^+\to R$ is continuous and its sign is alternated. By the fixed point theorem in a double cone and endowing certain growth conditions to f and g, the existence of at least two positive solutions for above problem was derived.

Key words three-point boundary value problem; Green's function; fixed point theorem in double cones; positive solution

常微分方程组多点边值问题正解存在性的研究具有重要的理论价值和现实意义,也引起越来越多的专家学者的关注[1-7]。文献[7]利用双锥上的不动点定理证明了三点边值问题

$$\begin{cases} x''+f(t,x)=0 & 0\le t\le 1 \\ x(0)-\beta x'(0)=0 \\ x(1)=\alpha x(\eta) & 0<\eta<1 \end{cases} \tag{1}$$

至少存在2个正解。文献[8]证明了二阶两点微分方程组

$$\begin{cases} x''+\lambda a(t)f(x(t),y(t))=0 & 0\le t\le 1 \\ y''+\lambda b(t)g(x(t),y(t))=0 & 0\le t\le 1 \\ x(0)=x(1)=y(0)=y(1)=0 \end{cases} \tag{2}$$

至少存在2组正解。

关于二阶三点微分方程组的边值问题

$$\begin{cases} x''+f(t,x,y)=0 & 0\le t\le 1 \\ y''+g(t,x,y)=0 & 0\le t\le 1 \\ x(0)-\beta_1 x'(0)=0 \quad x(1)=\alpha_1 x(\eta_1) & 0<\eta_1<1 \\ y(0)-\beta_2 y'(0)=0 \quad y(1)=\alpha_2 y(\eta_2) & 0<\eta_2<1 \end{cases} \tag{3}$$

收稿日期:2006-07-28
基金项目:国家自然科学基金资助项目(60573158);河北省自然科学基金资助项目(A2006000298)
作者简介:江卫华,副教授,主要从事应用泛函分析、常微分方程边值问题的研究,E-mail:weihuajiang@hebust.edu.cn

其中 $f, g: [0,1] \times R^+ \times R^+ \to R$ 是连续的且可以变号,正解存在性的研究目前尚未见报道。笔者利用双锥上的不动点定理,并赋予 f, g 一定的增长条件,证明二阶三点微分方程组的边值问题(3)至少存在 2 组正解。

1 预备知识

设 K 是 Banach 空间 $(X, \|\cdot\|)$ 上的一个锥, $r > 0$ 为常数。令 $K_r = \{x \in K | \ \|x\| < r\}$, $\partial K_r = \{x \in K | \ \|x\| = r\}$,另外假设 $\alpha: K \to R^+$ 是非负连续增泛函,即 α 连续且对任意 $\lambda \in (0,1)$, $\alpha(\lambda x) \le \alpha(x)$, $R^+ = [0, \infty)$。令 $K(b) = \{x \in K | \ \alpha(x) < b\}$, $\partial K(b) = \{x \in K | \ \alpha(x) = b\}$, $K_a(b) = \{x \in K | \ a < \|x\|, \alpha(x) < b\}$。

定理 1[7] 设 X 是实 Banach 空间, K, K 是 X 上的 2 个锥,且 $K' \subset K$。设 $T: K \to K$ 和 $T': K' \to K$ 是 2 个全连续算子, $\alpha: K' \to R^+$ 是非负连续增泛函,且对任意 $x \in K'$,满足 $\alpha(x) \le \|x\| \le M\alpha(x)$,其中 $M \ge 1$ 为常数。若存在 $b > a > 0$ 使得:1) 对 $x \in \partial K_a$, $\|Tx\| < a$; 2) 对 $x \in \partial K_a'$, $\|T'x\| < a$,且 $x \in \partial K'(b)$, $\alpha(T'x) > b$; 3) 对 $x \in \partial K'(b) \cap \{u | \ T'u = u\}$, $Tx = T'x$。则 T 在 K 中至少有 2 个不动点 y_1 和 y_2,使得 $0 \le \|y_1\| < a < \|y_2\|$, $\alpha(y_2) < b$。

定理 2 设 A 为 Banach 空间 X 上的全连续算子, B 为 X 上的连续算子,则 BA 为 X 上全连续算子。

引理 1[7] 设 $(1-\alpha\eta) + \beta(1-\alpha) \ne 0$, $0 < \eta < 1$,则边值问题

$$\begin{cases} x'' + y(t) = 0 & 0 \le t \le 1 \\ x(0) - \beta x'(0) = 0 & x(1) = \alpha x(\eta) \end{cases} \tag{4}$$

有唯一解

$$x(t) = -\int_0^t (t-s)\,y(s)\,\mathrm{d}s + \frac{t+\beta}{(1-\alpha\eta)+\beta(1-\alpha)}\int_0^1 (1-s)\,y(s)\,\mathrm{d}s - \frac{\alpha(t+\beta)}{(1-\alpha\eta)+\beta(1-\alpha)}\int_0^\eta (\eta-s)\,y(s)\,\mathrm{d}s$$

引理 2[7] 设 $(1-\alpha\eta) + \beta(1-\alpha) \ne 0$, $0 < \eta < 1$,则边值问题

$$\begin{cases} -x'' = 0 & 0 \le t \le 1 \\ x(0) - \beta x'(0) = 0 & x(1) = \alpha x(\eta) \end{cases} \tag{5}$$

的 Green 函数 $G(t,s)$ 为

$$G(t,s) = \begin{cases} \dfrac{(s+\beta)[(1-t) - \alpha(\eta - t)]}{(1-\alpha\eta)+\beta(1-\alpha)} & s \le t, s \le \eta \\ \dfrac{(s+\beta)(1-t) + \alpha(t-s)(\eta+\beta)}{(1-\alpha\eta)+\beta(1-\alpha)} & \eta \le s \le t \\ \dfrac{(t+\beta)[(1-s) - \alpha(\eta - s)]}{(1-\alpha\eta)+\beta(1-\alpha)} & t \le s \le \eta \\ \dfrac{(t+\beta)(1-s)}{(1-\alpha\eta)+\beta(1-\alpha)} & t \le s, s \ge \eta \end{cases}$$

假设如下条件成立:

Ⅰ $\alpha_i, \beta_i \ge 0$, $0 < \eta_i < 1$, $1 - \alpha_i\eta_i > 0$, $(1-\alpha_i\eta_i) + \beta_i(1-\alpha_i) > 0$, $i = 1,2$;

Ⅱ $f, g: [0,1] \times R^+ \times R^+ \to R$ 是连续的。

如果 Ⅰ成立,则式(5)的 Green 函数 $G_i(t,s) \ge 0$。令 $M_i = \max\limits_{0 \le t \le 1}\int_0^1 G_i(t,s)\,\mathrm{d}s$, $m_i = \min\limits_{\delta \le t \le 1-\delta}\int_\delta^{1-\delta} G_i(t,s)\,\mathrm{d}s$,其中 $\delta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$,显然 $0 < m_i < M_i$, $i = 1,2$。

令 $X = C[0,1] \times C[0,1]$,定义 X 上的范数 $\|\cdot\|$为: $\|(x,y)\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}$,其中 $\|x\| = \max\limits_{0 \le t \le 1}|x(t)|$,显然 X 按此范数是 Banach 空间。令 $K = \{(x,y) \in X | \ x(t) \ge 0, y(t) \ge 0, t \in [0,1]\}$; $K' = \{(x,y) \in X | \ x(t) \ge 0$,且 $x(t)$, $y(t)$ 在$[0,1]$上是凹函数$\}$。则 K 和 K 是 X 上的 2 个锥,且 $K' \subset K$。对$(x,y) \in K$,定义

$$\alpha(x,y) = \max\left\{\min_{\delta \le t \le 1-\delta} x(t), \min_{\delta \le t \le 1-\delta} y(t)\right\}$$

易知,当$(x,y) \in K$ 时, $\alpha(x,y) \le \|(x,y)\| \le \frac{1}{\delta}\alpha(x,y)$。定义

$$T(x,y)(t) = \left(\left(\int_0^1 G_1(t,s)\,f(s,x(s),y(s))\,\mathrm{d}s\right)^+, \left(\int_0^1 G_2(t,s)\,g(s,x(s),y(s))\,\mathrm{d}s\right)^+\right)$$

$$A(x,y)(t) = \left(\int_0^1 G_1(t,s)\,f(s,x(s),y(s))\,\mathrm{d}s, \int_0^1 G_2(t,s)\,g(s,x(s),y(s))\,\mathrm{d}s\right)$$

$$B(x,y) = (x^+, y^+)$$

$$T'(x,y)(t) = \left(\int_0^1 G_1(t,s)\,f^+(s,x(s),y(s))\,\mathrm{d}s, \int_0^1 G_2(t,s)\,g^+(s,x(s),y(s))\,\mathrm{d}s\right)$$

其中 $x^+(t) = \max\limits_{0 \le t \le 1}\{x(t), 0\}$。由 Ⅱ知 $A: K \to X$ 为全连续算子, $B: X \to K$ 为连续算子,从而 $T = BA: K \to K$ 为全连续算子, $T': K' \to K$ 为全连续算子。

2 主要结果

定理 3 设 Ⅰ和 Ⅱ成立,另假设存在 $a, b, d >$

0,使得 $0<\left(1+\frac{1}{\beta_i}\right)\max\left\{1,\frac{1-\alpha_i\eta_i}{\alpha_i(1-\eta_i)}\right\}d<a<\delta b<b$, $i=1,2$,并且 f,g 满足如下增长条件:

Ⅲ 当 $t\in[0,1]$, $u,v\in[0,b]$时,有 $f(t,0,v)\geq 0(\not\equiv 0)$, $g(t,u,0)\geq 0(\not\equiv 0)$;

Ⅳ. 当 $(t,x,y)\in[0,1]\times[d,b]\times[0,b]\cup[0,1]\times[0,b]\times[d,b]$时,有 $f(t,x,y)\geq 0$, $g(t,x,y)\geq 0$;

Ⅴ. 当 $(t,x,y)\in[0,1]\times[0,a]\times[0,a]$时,有 $f(t,x,y)<\frac{a}{M_1}$, $g(t,x,y)<\frac{a}{M_2}$;

Ⅵ 当 $(t,x,y)\in[\delta,1-\delta]\times[\delta b,b]\times[0,b]\cup[\delta,1-\delta]\times[0,b]\times[\delta b,b]$时,有 $f(t,x,y)>\frac{\delta b}{m_1}$ 或 $g(t,x,y)>\frac{\delta b}{m_2}$。

则边值问题(3)至少有 2 组正解 (x_1,y_1) 和 (x_2,y_2) 使得 $0<\|(x_1,y_1)\|<a<\|(x_2,y_2)\|$, $\alpha(x_2,y_2)<\delta b$。

证明　首先验证定理 1 的条件 1)成立,对任意 $(x,y)\in\partial K_a$,由 Ⅴ可得

$$\|T(x,y)\|=\left\|\left(\left(\int_0^1 G_1(t,s)f(s,x(s),y(s))\mathrm{d}s\right)^+,\left(\int_0^1 G_2(t,s)g(s,x(s),y(s))\mathrm{d}s\right)^+\right)\right\|=$$
$$\left\|\left(\max\left\{\int_0^1 G_1(t,s)f(s,x(s),y(s))\mathrm{d}s,0\right\},\max\left\{\int_0^1 G_2(t,s)g(s,x(s),y(s))\mathrm{d}s,0\right\}\right)\right\|<$$
$$\left\|\left(\frac{a}{M_1}\int_0^1 G_1(t,s)\mathrm{d}s,\frac{a}{M_2}\int_0^1 G_2(t,s)\mathrm{d}s\right)\right\|=a$$

然后验证定理 1 的条件 2)成立。对任意 $(x,y)\in K_a'$,由 Ⅴ可得

$$\|T'(x,y)\|=\left\|\left(\int_0^1 G_1(t,s)f^+(s,x(s),y(s))\mathrm{d}s,\int_0^1 G_2(t,s)g^+(s,x(s),y(s))\mathrm{d}s\right)\right\|<$$
$$\left\|\left(\frac{a}{M_1}\int_0^1 G_1(t,s)\mathrm{d}s,\frac{a}{M_2}\int_0^1 G_2(t,s)\mathrm{d}s\right)\right\|=a$$

对 $(x,y)\in\partial K'(\delta b)$, $\alpha(x,y)=\delta b$,即 $\max\{\min_{\delta\leq t\leq 1-\delta}x(t),\min_{\delta\leq t\leq 1-\delta}y(t)\}=\delta b$ 可得:$\delta b\leq\|x\|\leq b$, $\|y\|\leq b$ 或 $\|x\|\leq b$, $\delta b\leq\|y\|\leq b$。由 Ⅵ可得

$$\alpha(T'(x,y))=$$
$$\max\left\{\min_{\delta\leq t\leq 1-\delta}\int_0^1 G_1(t,s)f^+(s,x(s),y(s))\mathrm{d}s,\min_{\delta\leq t\leq 1-\delta}\int_0^1 G_2(t,s)g^+(s,x(s),y(s))\mathrm{d}s\right\}\geq$$
$$\max\left\{\min_{\delta\leq t\leq 1-\delta}\int_\delta^{1-\delta} G_1(t,s)f^+(s,x(s),y(s))\mathrm{d}s,\min_{\delta\leq t\leq 1-\delta}\int_\delta^{1-\delta} G_2(t,s)g^+(s,x(s),y(s))\mathrm{d}s\right\}$$

所以,对于 $(t,x,y)\in[\delta,1-\delta]\times[\delta b,b]\times[0,b]\cup[\delta,1-\delta]\times[0,b]\times[\delta b,b]$:当 $f(t,x,y)>\frac{\delta b}{m_1}$时,$\alpha(T'(x,y))>\frac{\delta b}{m_1}\min_{\delta\leq t\leq 1-\delta}\int_\delta^{1-\delta}G_1(t,s)\mathrm{d}s=\delta b$;当 $g(t,x,y)>\frac{\delta b}{m_2}$时,$\alpha(T'(x,y))>\frac{\delta b}{m_2}\min_{\delta\leq t\leq 1-\delta}\int_\delta^{1-\delta}G_2(t,s)\mathrm{d}s=\delta b$。

再验证定理 1 的条件 3)成立,对 $(x,y)\in K_a'(\delta b)\cap\{(x,y)|\ T'(x,y)=(x,y)\}$,由 $(x,y)\in K_a'(\delta b)$,可得 $\|x\|>a$ 或 $\|y\|>a$ 及 $\alpha(x,y)<\delta b$,得 $\|(x,y)\|<b$。

若 $\|x\|>a>\left(1+\frac{1}{\beta_1}\right)\max\left\{1,\frac{1-\alpha_1\eta_1}{\alpha_1(1-\eta_1)}\right\}d$,证明 $d\leq x(t)$, $t\in[0,1]$。首先证明

$$x(0)\geq\max\left\{1,\frac{1-\alpha_1\eta_1}{\alpha_1(1-\eta_1)}\right\}d \tag{6}$$

采用反证法。若式(6)不成立,那么存在 $t_0\in(0,1)$,使 $x'(t_0)>\frac{1}{\beta_1}\max\left\{1,\frac{1-\alpha_1\eta_1}{\alpha_1(1-\eta_1)}\right\}d$,由 $x(t)$ 的凹性知 $x'(0)\geq x'(t_0)>\frac{1}{\beta_1}\max\left\{1,\frac{1-\alpha_1\eta_1}{\alpha_1(1-\eta_1)}\right\}d$,因此

$$0=x(0)-\beta_1x'(0)<\max\left\{1,\frac{1-\alpha_1\eta_1}{\alpha_1(1-\eta_1)}\right\}d-\beta_1\cdot\frac{1}{\beta_1}\max\left\{1,\frac{1-\alpha_1\eta_1}{\alpha_1(1-\eta_1)}\right\}d=0 \tag{7}$$

式(7)自身矛盾。其次,仍用反证法证明 $x(1)\geq d$。若 $x(1)<d$,由 $x(t)$ 的凹性知

$$\frac{x(\eta_1)-x(1)}{1-\eta_1}\geq\frac{x(0)-x(1)}{1-0}$$

即 $x(\eta_1)-\eta_1x(1)\geq(1-\eta_1)x(0)$,由 $x(1)=\alpha_1x\cdot(\eta_1)$可得

$$x(0)\leq\frac{1-\alpha_1\eta_1}{\alpha_1(1-\eta_1)}x(1)<\frac{1-\alpha_1\eta_1}{\alpha_1(1-\eta_1)}d \tag{8}$$

这里,式(8)与式(6)矛盾,故对 $t\in[0,1]$,有 $d\leq x(t)\leq b$。

类似可以证明,若 $\|y\|>a$,对 $t\in[0,1]$,有 $d\leq y(t)\leq b$。

由Ⅳ知 $f^+(t,x(t),y(t))=f(t,x(t),y(t))$, $g^+(t,x(t),y(t))=g(t,x(t),y(t))$,因

此当 $(x,y)\in K_a'(\delta_b)\cap\{(x,y)\mid T'(x,y)=(x,y)\}$ 时,$T(x,y)=T'(x,y)$。

至此,定理 1 的条件全部满足,故 T 在 K 上有 2 组不动点 (x_1,y_1) 和 (x_2,y_2),且 $0<\|(x_1,y_1)\|<a<\|(x_2,y_2)\|$,$\alpha(x_2,y_2)<\delta_b$。

最后证明上述 T 的不动点 (x_1,y_1) 和 (x_2,y_2) 为问题(3)的解。

易知,(x,y) 为问题(3)的解的充分必要条件是 (x,y) 为 A 的不动点,因此,只须证明若 (x,y) 为 T 的不动点,则一定是 A 的不动点。如果 (x,y) 为 T 的不动点,令

$$A_1(x,y)=\int_0^1 G_1(t,s)f(s,x(s),y(s))\,\mathrm{d}s$$

$$A_2(x,y)=\int_0^1 G_2(t,s)g(s,x(s),y(s))\,\mathrm{d}s$$

$$T_1(x,y)=\left(\int_0^1 G_1(t,s)f(s,x(s),y(s))\,\mathrm{d}s\right)^+$$

$$T_2(x,y)=\left(\int_0^1 G_2(t,s)g(s,x(s),y(s))\,\mathrm{d}s\right)^+$$

设 (x,y) 不是 A 的不动点,则 $x\neq A_1(x,y)$ 或 $y\neq A_2(x,y)$。如果 $x\neq A_1(x,y)$,则存在 $t_0\in(0,1)$,使 $A_1(x,y)(t_0)<0=x(t_0)$。取包含 t_0 且使 $A_1(x,y)(t)<0$ 的最大区间 (t_1,t_2),由 III知 $[t_1,t_2]\neq[0,1]$,若 $t_2<1$,$A_1(x,y)(t_2)=0$,$A_1'(x,y)(t_2)\geq 0$,由 III知,当 $t\in(t_1,t_2)$ 时,$A_1''(x,y)(t)=-f(t,0,y(t))\leq 0$,从而 $t_1=0$,再由 $A_1(x,y)(0)-\beta A_1'(x,y)(0)=0$,推得 $A_1'(x,y)(0)<0$,矛盾。若 $t_1>0$,那么 $A_1(x,y)(t_1)=0$,$A_1'(x,y)(t_1)\leq 0$,由 III得,当 $t\in(t_1,t_2)$ 时,$A_1''(x,y)(t)=-f(t,0,y(t))\leq 0$,从而 $t_2=1$,由 $A_1(x,y)(1)=\alpha_1A_1(x,y)(\eta_1)$,可得 $A_1(x,y)(\eta_1)<0$。由 $A_1(x,y)(t)$ 凹性知 $t_1<\eta_1$,且

$$\frac{|A_1(x,y)(\eta_1)|}{\eta_1-t_1}\leq\frac{|A_1(x,y)(1)|}{1-t_1}$$

从而 $|A_1(x,y)(\eta_1)|\leq\frac{\eta_1-t_1}{1-t_1}|A_1(x,y)(1)|\leq\alpha_1\eta_1|A_1(x,y)(\eta_1)|$,得 $\alpha_1\eta_1\geq 1$,与 I矛盾。所以 $x(t)=A_1(x,y)(t)$。类似可以证明 $y(t)=A_2(x,y)(t)$。从而 (x,y) 为 A 的不动点。

定理 3 证明完毕。

参 考 文 献

[1] Feng Wenying. On a *m*-point boundary value problem [J]. Nonlinear Analysis TMA, 1997, 30(6): 5369-5374

[2] Gupta C P. A sharper condition for the solvability of a three-point second order boundary value problem [J]. J Math Anal Appl, 1997, 205: 579-586

[3] Gupta C P. A generalized multi-point boundary value problem for second order Ordinary Differential Equations [J]. Appl Math Comput, 1998, 89: 133-146

[4] Ma Ruyan. Existence theorems for a second order *m*-point boundary value problem [J]. J Math Anal Appl, 1997, 211: 545-555

[5] Ma Ruyan. Positive solutions for second order three-point boundary value problem [J]. Applied Mathematics Letters, 2001, 14: 1-5

[6] Ma Ruyan. Positive solutions of a nonlinear three-point boundary value problem [J]. Electronic Journal of Differential Equations, 1999, 34: 1-8

[7] 郭彦平,葛渭高,董士杰. 具有变号非线性项的二阶三点边值问题的两个正解[J]. 应用数学学报, 2004, 27(3): 522-529

[8] Ma Ruyan. Multiple nonnegative solutions of second-order systems of boundary value problems [J]. Nonlinear Analysis, 2000, 42: 1003-1010

编辑部启事 ·

本刊现已全文回溯上网,欢迎浏览,网址为 http://xuebao.cau.edu.cn,或从中国农业大学校园网首页的“学术刊物”进入。

本刊面向校内外征集农业及相关学科的科研论文,欢迎广大科研工作者投稿。

《中国农业大学学报》在 2006 年教育部组织的“首届中国高校精品·优秀·特色科技期刊评比”中被评为“中国高校精品科技期刊”;

本刊近年各项评价指标有所上升,2005 年总被引频次和影响因子分别为 1 264 和 0.672(据《中国期刊引证报告(扩展版)》,中国科技信息研究所·万方数据股份有限公司)。