

## 均布荷载下拱的弹塑性二次分岔屈曲性能初探

剧锦三 蒋秀根 梁宗敏 陈杰

(中国农业大学 水利与土木工程学院, 北京 100083)

**摘要** 使用一种新的屈曲路径跟踪策略,对拱在平面内的弹塑性极值点屈曲和二次分岔屈曲全过程进行跟踪分析,得到全跨均布荷载作用下材料、截面相同而矢跨比不同的拱的弹塑性极值点屈曲荷载和二次分岔屈曲荷载,以及半跨均布荷载作用下其极值点屈曲荷载。研究结果表明:对于弹塑性拱结构,在全跨均布荷载作用下,二次分岔屈曲总是最危险的屈曲形式,其发生必定先于极值点屈曲。对于材料、截面相同,矢跨比 0.1~0.5 的拱,半跨均布荷载作用下矢跨比 0.23 的拱极值点屈曲极限承载力最大;全跨均布荷载作用下,矢跨比 0.1 的拱极值点屈曲和二次分岔屈曲极限承载力均大于其他拱。将得到的全跨和半跨均布荷载作用下不同长细比、不同矢跨比拱的弹塑性极限承载力计算结果归纳总结,得到极限承载力简化计算公式,可以直接查用,便于工程设计中使用。

**关键词** 拱结构;弹塑性屈曲;极值点屈曲;二次分岔屈曲

**中图分类号** TU 311.41

**文章编号** 1007-4333(2005)06-0075-04

**文献标识码** A

## Secondary bifurcation buckling behavior of elastic-plastic arch under uniform load distribution

Ju Jinsan, Jiang Xiugen, Liang Zongmin, Chen Jie

(College of Water Conservancy and Civil Engineering, China Agricultural University, Beijing 100083, China)

**Abstract** The whole processes of a inplane primary flexuosity and a secondary bifurcation flexuosity were traced by a high-efficient tracing strategy. The elastic-plastic primary buckling load and the secondary bifurcation buckling load under a full-span load distribution and the primary buckling load under a half-span load distribution were obtained. The calculation results show that the secondary bifurcation flexuosity is always the most dangerous buckling type when the arch is under a full-span load distribution for an elastic-plastic arch. The secondary bifurcation will always happen before the primary flexuosity. For a primary buckling load, the limit load carried capacity of the arch of 0.23 ratio-span is the biggest one under a half span load distribution and that of the arch of 0.1 rise-span ratio is the biggest one under a full span load distribution. For a secondary bifurcation buckling load, the limit load carried capacity of the arch of 0.1 rise-span ratio is the biggest one under a full span load distribution. Finally the elastic-plastic limit loads carried capacities of arch under a full and half span load distributions were calculated and their mathematical models were induced for engineering reference.

**Key words** arch; elastic-plastic flexuosity; primary flexuosity; secondary bifurcation flexuosity

拱结构是一种对初始缺陷和微小扰动十分敏感的结构形式,在对称荷载(如全跨均布荷载)作用下,可能发生极值点屈曲和二次分岔屈曲(图1)。在实验和实际结构的破坏案例中,二次分岔屈曲往往是拱结构最常见的破坏形式,因此对拱结构弹塑性二

次分岔屈曲的研究具有重要的理论和工程意义<sup>[1]</sup>。

拱的极值点屈曲变形是指荷载作用下拱结构发生与荷载方向一致的变形,直到荷载达到结构承载力极限,结构发生越跃并从而失去承载力。拱的二次分岔屈曲变形是指在对称荷载加载过程的某一时刻

收稿日期: 2005-03-01

基金项目: 科技部国家重要技术标准专项(2002BA906A17-3)

作者简介: 剧锦三,副教授,博士,主要从事结构稳定和断裂研究, E-mail: jujinsan@tsinghua.org.cn; 蒋秀根,副教授,通讯作者,主要从事结构工程方向的研究, E-mail: jiangxiugen@tsinghua.org.cn

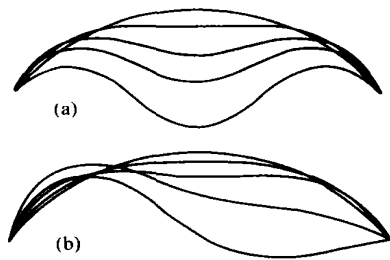


图1 拱的弹塑性极值点屈曲(a)和二次分岔屈曲(b)

Fig. 1 Primary flexuosity (a) and secondary bifurcation flexuosity (b)

刻,由于结构初始缺陷或微小扰动的影响,拱结构的变形形式从对称变形跳跃到反对称变形,这种初始缺陷或微小的扰动影响是不可避免的。拱结构的最终破坏形式取决于极值点屈曲和二次分岔屈曲破坏形式中屈服荷载较小的一种形式。

对于拱的弹塑性二次分岔屈曲的研究,关键问题是如何确定分岔点,以及对屈曲后平衡路径的跟踪<sup>[2~4]</sup>。以往的研究计算方法比较烦琐,通常把屈曲路径分成屈曲前和屈曲后分别计算,为此,本文中利用一种新的屈曲路径跟踪策略<sup>[5]</sup>,可以连续跟踪拱结构弹塑性二次分岔屈曲全过程,得到二次分岔屈曲的屈服荷载,并与极值点屈曲荷载进行比较,判断拱结构最终的破坏形式。

## 1 基本理论

本文中以 von Mises 准则作为钢材屈服准则,材料为理想随动强化弹塑性材料,采用静力加载。

二次分岔屈曲研究中首先要确定分岔点,即判断临界点是极值点还是分岔点。一般判断准则为:

$$\text{极值点 } \det[K] = 0; z^T Q = 0 \quad (1)$$

$$\text{分岔点 } \det[K] = 0; z^T Q = 0 \quad (2)$$

式中:  $K$  为结构在临界点的弹塑性刚度阵;  $z$  为对应于刚度阵零特征值的特征向量;  $Q$  为荷载向量。式(1)的物理意义为临界点特征模态与荷载方向一致,结构屈曲时荷载会做功;式(2)的物理意义为分岔点特征模态与荷载向量正交,所以荷载不做功。式(1)和(2)所示准则只适用于判断临界点,并不适用于屈曲前和屈曲后的分析。本文中使用的方方法<sup>[5]</sup>简单且迭代次数少,可以无限逼近真实解。

## 2 算例与分析

荷载形式 1:全跨均布荷载。模型见图 2,材料及其几何特性:跨度 160 m;弹性模量  $E = 2.06 \times$

$10^5$  MPa; 截面为圆环,外径 1 m,内径 0.98 m;理想弹塑性材料,设计强度 215 MPa;矢跨比  $f/L = 0.1 \sim 0.5$ 。

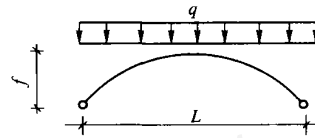


图2 两端铰接拱

Fig. 2 Hinged arch

从图 3 可以看出,全跨均布荷载作用时拱的极值点屈曲极限承载力均明显大于其二次分岔屈曲极限承载力,同时,缺陷(水平方向变形峰值是跨度的  $4/100\,000$ ,竖向变形峰值是跨度的  $1.2/10\,000$ )的存在大大地降低了拱的承载力。由于实际构件的几何初始缺陷是不可避免的,所以在拱的设计中通常要考虑缺陷对承载力的影响。

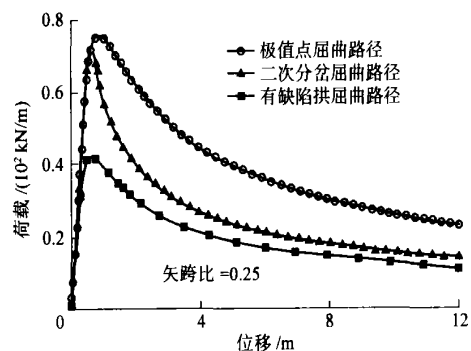


图3 全跨均布荷载作用下拱的屈曲路径

Fig. 3 Buckling path of arch with 0.25 rise-span ratio under full span load distribution

图 4 示出全跨均布荷载作用下矢跨比 0.1 ~ 0.5 拱的极值点屈曲荷载和二次分岔屈曲荷载,可

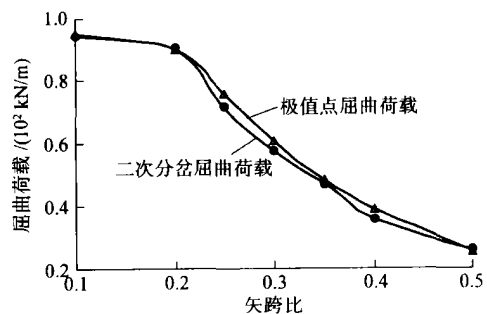


图4 全跨均布荷载作用下不同矢跨比拱的屈曲荷载

Fig. 4 Buckling load of arch with different rise-span ratios under full span load distribution

可以看出,二次分岔屈曲一定是首先发生的破坏形式,且矢跨比 0.1 的拱的极值点屈曲荷载和二次分岔屈曲荷载最大。在常用矢跨比范围内,二次分岔屈曲荷载与极值点屈曲荷载相差不大,但其破坏形式却完全不同(图 5)。

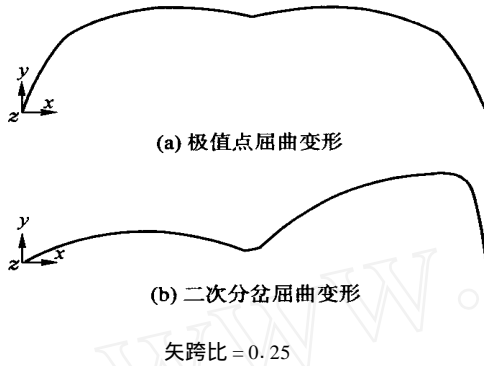


图 5 全跨均布荷载作用下拱的屈曲变形

Fig. 5 Buckling deformation of arch with 0.25 rise-span ratio under full span load distribution

荷载形式 2:右半跨均布荷载。

从图 6~8 可以看出,半跨均布荷载作用下的拱变形方向与荷载方向一致,屈曲形式属于极值点屈曲,且矢跨比 0.23 时拱的承载力最大。与图 3 对比可以发现,半跨均布荷载作用下拱的极限承载力比全跨均布荷载作用下小很多,这是因为拱在全跨荷载作用下截面主要受压,而在半跨荷载作用下主要

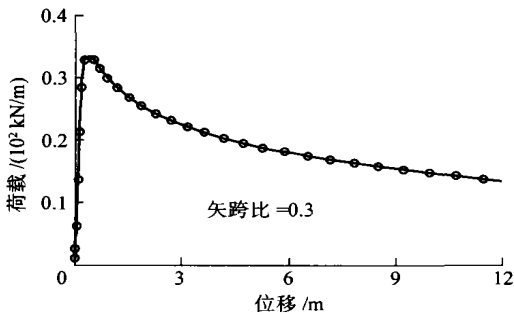


图 6 右半跨均布荷载作用下拱的极值点屈曲路径

Fig. 6 Buckling path of arch with 0.3 rise-span ratio under right half span load distribution

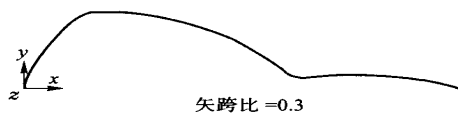


图 7 半跨均布荷载作用下拱的极值点屈曲变形

Fig. 7 Buckling deformation of arch with 0.3 rise-span ratio under half span load distribution

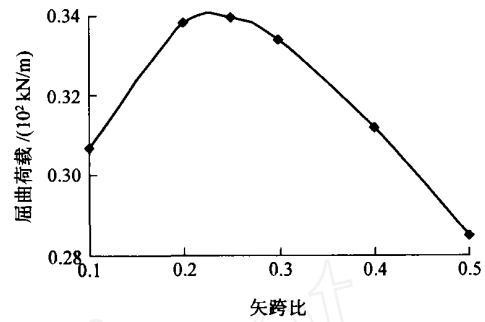


图 8 半跨均布荷载作用下矢跨比不同时拱的屈曲荷载

Fig. 8 Buckling load of arch with different rise-span ratio under half span load distribution

受弯,故其极限承载力下降。

### 3 承载力简化计算公式

在上述分析的基础上,分别对不同跨度弹塑性拱在全跨和半跨均布荷载作用下的极值点屈曲荷载、全跨均布荷载作用下的二次分岔屈曲荷载计算结果进行归纳总结,得到不同矢跨比拱的极限承载力简化计算公式(表 1)。

表 1 全跨、半跨均布荷载条件下不同跨度拱的极值点屈曲和二次分岔屈曲极限承载力简化计算公式

Table 1 Simplified formula for load carrying capacities of primary and secondary bifurcation flexuosity under uniform full and half span loads distributions

矢跨比	极值点屈曲相对极限承载力 $N/N_y$		二次分岔屈曲相对极限承载力 $N/N_y$
	全跨均布荷载	半跨均布荷载	全跨均布荷载
0.1	0.004 9	-1.078 8	0.001 9 -1.802 6
0.2	0.005 9	-1.377 7	0.002 3 -1.944 4
0.3	0.004 9	-1.642 5	0.002 7 -1.998 3
0.4	0.004 0	-1.835 2	0.003 3 -2.032 4
0.5	0.003 4	-1.939 2	0.003 9 -2.045 7
			0.003 2 -1.918 8

注:  $N$  为极限承载力,  $N_y$  为常数,  $N_y = f_y \cdot A$ , 其中  $A$  为拱截面面积;  $\lambda$  为修正长细比,  $\lambda = (N_y/N_0)^{1/2}$ , 其中  $N_0 = \frac{2EI_x}{S^2}$ ,  $S$  为拱弧长,  $\eta$  为有效长度系数, 对于两端铰接拱,  $\eta = 0.5^{[5]}$ 。

### 4 结 论

1) 对于弹塑性拱,全跨均布荷载作用下,二次分岔屈曲总是最危险的屈曲形式,必定先于极值点屈

曲发生。

2) 对于不同矢跨比、截面相同的弹塑性拱,其极值点屈曲荷载,在半跨均布荷载作用下,矢跨比为 0.23 的拱极限承载力最大;全跨均布荷载作用下,矢跨比为 0.1 的拱极限承载力最大。

3) 对于弹塑性拱的二次分岔屈曲,全跨均布荷载作用下矢跨比为 0.1 的拱极限承载力最大。

4) 本文中提出的极限承载力简化计算公式可以直接查用,对于工程设计有重要的参考价值。

### 参 考 文 献

- [1] 剧锦三,郭彦林. 网壳结构稳定研究的现状及展望 [A]. 见:中国建筑金属结构协会及清华大学编. '98 中国建筑钢结构工程暨学术会议论文集 [C]. 北京:企业出版社, 1998. 40~44
- [2] Teng J G, Lou Y F. Analysis of bifurcation buckling in shell of revolution after axisymmetric snap-through [A]. In: Tian L. Proceedings of Asia-pacific Conference on Shell and Spatial Structures [C]. Beijing: China Civil Engineering Society, 1996. 579~586
- [3] Teh L H, Clarke M J. Tracing secondary equilibrium paths of elastic framed structures [J]. Journal of Engineering Mechanics, 1999, 125 (12): 1358~1364
- [4] Guo Yanlin, Ju Jinsan. Effects of cables on the structure hybridized by I section arch and cables [A]. Proceedings of The 7th International Symposium on Structural Failure and Plasticity [C]. Melbane (Australia): IMPLAST, 2000. 1124~1128
- [5] 剧锦三,郭彦林. 拱结构的弹性二次分岔屈曲性能 [J]. 工程力学, 2002: 109~112