

# 基于 Matlab 的斜齿锥齿轮副齿面接触的计算机模拟

李海涛 魏文军

(中国农业大学 工学院, 北京 100083)

**摘要** 为进行斜齿锥齿轮副的齿面接触分析,并直观显示齿面接触区,利用圆向量函数和球向量函数的矢量回转和坐标变换方法,建立了斜齿锥齿轮副齿面接触的数学模型;利用 Matlab 编制软件绘制斜齿锥齿轮副齿面接触的空间图形。对一斜齿锥齿轮副进行齿面接触分析和接触区图形显示,其轮 1 和轮 2 为左、右旋斜齿锥齿轮,齿数分别为 16 和 32,法向模数 5 mm,法向压力角 20°,轴交角 90°,法向齿顶高系数为 1,法向顶隙系数为 0.2,螺旋角 10°,齿宽 40 mm。结果表明:斜齿锥齿轮副齿面的瞬时接触线是相互平行的直线,传动比恒为 2,为两轮齿数的反比。本软件可用于数控机床进行齿轮加工,也可用于齿面接触的计算机辅助分析。

**关键词** 斜齿锥齿轮;齿面接触分析; Matlab

**中图分类号** TH 132.41

**文章编号** 1007-4333(2005)05-0073-03

**文献标识码** A

## Computer simulation for skew bevel gears contact analysis based on Matlab

Li Haitao, Wei Wenjun

(College of Engineering, China Agricultural University, Beijing 100083, China)

**Abstract** To analyze and display the contact of skew bevel involute gears, a mathematic model was established by vector gyration and coordinate transform of circle vector functions and sphere vector functions. Space figure of gears contact was drawn up by Matlab. The developed package was applied to a pair of skew bevel gears, and results indicated that the instantaneous contact lines were parallel straight lines and the transmission ratio was invariable. The package can be used not only for machining skew bevel gears on NC machine tools, but also for computer aided analysis of skew bevel gears contact.

**Key words** skew bevel involute gears; gears contact analysis; Matlab

目前,直齿圆锥齿轮和曲齿圆锥齿轮广泛应用于工程实际中,斜齿圆锥齿轮由于加工和制造复杂,在工程实际中很少使用,但其传动性能和承载能力优于直齿轮;斜齿圆柱齿轮常应用于高速、重载的传动中<sup>[1-2]</sup>。国内外对斜齿锥齿轮的研究较少:文献[3]采用计算机模拟了展成的直齿和斜齿锥齿轮,但由于机床设计的原因,得到的都不是球面渐开线齿面的斜齿锥齿轮;文献[4]只是按球面渐开线齿面形成方法建立了斜齿锥齿轮的三维模型,没有涉及齿面啮合问题。

笔者根据锥齿轮的球面渐开线齿面形成方法<sup>[1]</sup>,利用圆向量函数和球向量函数的矢量回转和

坐标变换方法<sup>[5-7]</sup>建立斜齿圆锥齿轮副的齿面接触分析模型;利用 Matlab 的计算功能和三维图形显示功能<sup>[8-9]</sup>显示齿面接触区域,以期斜齿锥齿轮副的加工和制造构建研究平台。

### 1 斜齿锥齿轮齿面接触分析计算机模拟的数学模型

#### 1.1 齿面方程与齿面的单位法向量

根据斜齿圆锥齿轮的齿面形成原理<sup>[3]</sup>知其齿面为渐开螺旋面。本文中约定:齿轮 1、2 分别为左、右旋斜齿锥齿轮;齿面分别为左、右旋渐开螺旋面 ( $b_1 < 0, b_2 > 0$ )。在与齿面固连的坐标系  $i(O_i -$

收稿日期: 2005-01-26

作者简介: 李海涛,讲师,主要从事齿轮传动的研究, E-mail: libillow@sohu.com

$i_i, j_i, k_i, i = 1, 2)$  中, 利用圆向量函数和球向量函数<sup>[5]</sup>写出齿面  $i$  的方程:

$$\begin{aligned} (r_i)_{0i} = & \sin b_i [R \cos(i \sin b_i) - u_i \cos(i \sin b_i + \\ & b_i)] e_i(i) + [u_i \sin(i \sin b_i + b_i) - \\ & R \sin(i \sin b_i)] g_i(i) + \cos b_i [R - \\ & R \cos(i \sin b_i) + u_i \cos(i \sin b_i + b_i)] k_i \end{aligned} \quad (1)$$

式中:  $u_i$  和  $i$  为齿面参数,  $i > 0$ ;  $R$  为两齿轮大端分度圆的锥距;  $b_i$  为齿轮  $i$  基圆锥半锥角;  $b_i$  为齿轮  $i$  基圆锥上的螺旋角。由式(1), 根据文献[5]得到齿面  $i$  上任意一点的单位法向量

$$\begin{aligned} (n_i)_{0i} = & -\sin b_i \sin(i \sin b_i + b_i) e_i(i) - \\ & \cos(i \sin b_i + b_i) g_i(i) + \\ & \cos b_i \sin(i \sin b_i + b_i) k_i \end{aligned} \quad (2)$$

方向由实体指向空域。

## 1.2 两齿面的接触点及传动比

静坐标系  $0_i(O_{0i}, i_{0i}, j_{0i}, k_{0i})$  固定, 动坐标系  $i(O_i, i_i, j_i, k_i)$  与齿面  $i$  固连,  $k_i = k_{0i}$  ( $i = 1, 2$ ) 与齿轮轴线重合。两轮轴夹角即  $k_{01}$  和  $k_{02}$  的夹角为  $\Sigma$ ,  $i_{01}, i_{02}, k_{01}$  和  $k_{02}$  在同一平面内。各坐标系间的相互位置关系(图1)可表示为

$$\begin{aligned} (O_2 O_1)_{01} = & R \cos b_2 (-\sin i_{01} + \\ & \cos k_{01}) - R \cos b_1 k_{01} \end{aligned}$$

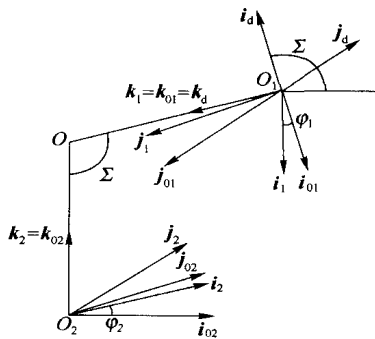


图1 各坐标系间的相互位置关系

Fig. 1 Ubiquity of coordinate systems

利用圆向量函数、球向量函数得到齿面方程及其对应的单位法向量在静坐标系  $0_i$  中的表达式分别为

$$\begin{aligned} (r_i)_{0i} = & \sin b_i [R \cos(i \sin b_i) - u_i \cos(i \sin b_i + \\ & b_i)] e_{0i}(i) + [u_i \sin(i \sin b_i + b_i) - \\ & R \sin(i \sin b_i)] g_{0i}(i) + \cos b_i [R - \\ & R \cos(i \sin b_i) + u_i \cos(i \sin b_i + b_i)] k_{0i} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} (n_i)_{0i} = & \cos b_i \sin(i \sin b_i + b_i) k_{0i} - \\ & \cos(i \sin b_i + b_i) g_{0i}(i) - \end{aligned}$$

$$\sin b_i \sin(i \sin b_i + b_i) e_{0i}(i) \quad (4)$$

其中  $i$  为齿轮  $i$  ( $i = 1, 2$ ) 的转角。  $0_2 \rightarrow 0_1$  的转换矩阵为  $M_{21} = R[k_{01}, j \cdot R[j_d, j], j]$ , 则

$$(r_2)_{01} = M_{21} (r_2)_{02} \quad (5)$$

$$(n_2)_{01} = M_{21} (n_2)_{02} \quad (6)$$

根据齿面接触条件, 由式(3)~(6)得齿面接触方程

$$\begin{cases} (r_2)_{01} - (r_1)_{01} - (O_2 O_1)_{01} = 0 \\ (n_2)_{01} + (n_1)_{01} = 0 \end{cases} \quad (7)$$

根据文献[5]算得两齿面的瞬时传动比

$$i_{12} = - [k_{02}, (r_2)_{02}, (n_2)_{02}] / [k_{01}, (r_1)_{01}, (n_1)_{01}] \quad (8)$$

## 1.3 任一接触点处两齿面主方向 $u$ 线的关系

因齿面为直纹面, 故参数曲线  $i$  线和  $u$  线为曲率线, 即  $r_i$  和  $r_u$  为齿面主方向。轮1和轮2在接触点处齿面的主方向  $r_u$  分别为

$$\begin{aligned} (r_{u1})_{01} = & -\sin b_1 \cos(i_1 \sin b_1 + b_1) e_{01}(i_1 + \\ & i_1) + \sin(i_1 \sin b_1 + b_1) g_{01}(i_1 + i_1) + \\ & \cos b_1 \cos(i_1 \sin b_1 + b_1) k_{01} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (r_{u2})_{02} = & -\sin b_2 \cos(i_2 \sin b_2 + b_2) e_{02}(i_2 + \\ & i_2) + \sin(i_2 \sin b_2 + b_2) g_{02}(i_2 + i_2) + \\ & \cos b_2 \cos(i_2 \sin b_2 + b_2) k_{02} \end{aligned}$$

为研究两齿面主方向之间的关系, 将  $(r_{u2})_{02}$  转换到坐标系  $0_1$ ,  $(r_{u2})_{01} = M_{21} (r_{u2})_{02}$ 。

## 2 基于 Matlab 的齿面接触模拟实例

根据所建立的数学模型式(1)~(8), 利用 Matlab<sup>[8]</sup>编制程序对齿面接触情况进行模拟。具体步骤如下。

1) 求解非线性方程组式(7)得到两齿面的接触点。

式(7)实际上是由5个方程组成的非线性方程组, 含有6个未知量  $u_1, i_1, i_2, u_2, i_2$  和  $i_2$ , 给定  $i_1$  控制接触点在齿面上的位置, 可以解得其他5个未知量, 从而确定两齿面的1个接触点。具体步骤为: 首先用齿轮1大端分度锥处的齿面参数  $i_1 = \arccos(\cos i_1 / \cos b_1) / \sin b_1$  求解出1个接触点, 然后增大  $i_1$  继续求解齿面接触点, 直到齿轮1的齿顶; 减小  $i_1$  求两齿面接触点直到齿轮2的齿顶, 从而得到两齿面的接触迹线。

2) 利用 Matlab 函数 mesh() 绘制两齿面  $i_1$  和  $i_2$  接触时的空间图形。

3) 根据式(8)计算传动比。

例:已知  $z_1 = 16, z_2 = 32, m_n = 5 \text{ mm}, \alpha_n = 20^\circ, \alpha = 90^\circ, h_a^* = 1, c^* = 0.2, \beta_1 = 10^\circ$  (左旋),  $\beta_2 = 10^\circ$  (右旋),  $b = 40 \text{ mm}$ 。采用所建模型绘制两齿面接触时的空间图形(图2)。由图2可见,两齿面为线接触,接触线平行于两齿面的主方向  $u$  线。任一接触点处两齿面主方向  $u$  线  $(r_{u1})_{01}$  与  $(r_{u2})_{01}$  方向一致,这进一步表明齿面接触是线接触。两齿面在所有接触点接触时的瞬时传动比都为2,等于两齿轮的齿数的反比。这些结果证明模型是正确的。

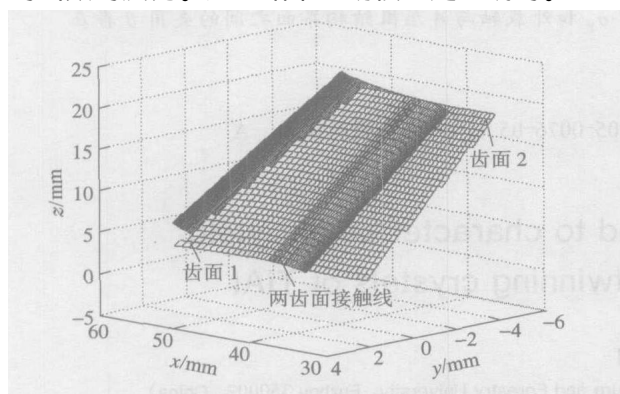


图2 两齿面瞬时接触线

Fig. 2 Instantaneous contact lines of two gears

### 3 结论

1) 利用 Matlab 软件的计算和显示曲面功能,可进行齿面接触分析,并在三维空间显示齿面接触区。

2) 本研究建立的斜齿锥齿轮三维模型可应用于数控机床进行斜齿锥齿轮的加工,从而减小了斜齿

锥齿轮的加工复杂性小,这将推动斜齿锥齿轮在工程中的应用。

3) 本软件提供了一种直观的预测斜齿锥齿轮副齿面接触情况的方法,但未考虑安装误差、载荷、热处理后的变形等因素,若考虑这些因素,可更真实地预测两齿面的接触情况。这也是应进一步研究的方向。

### 参考文献

- [1] 申永胜. 机械原理教程[M]. 北京:清华大学出版社, 1999. 181~207
- [2] 宋玉明,刘国祥. 连续变位的斜齿圆锥齿轮的切齿工艺[J]. 机械设计与制造工程, 2001(4): 64~65
- [3] 董学朱,樊孝福. 展成直齿及斜齿锥齿轮传动的计算机模拟[J]. 齿轮, 1991, 15(3): 1~6
- [4] 王中庆,郭春亮. 渐开线齿轮函数型三维特征体元建模[J]. 机械工程师, 2004(3): 10~14
- [5] 董学朱. 齿轮啮合理论基础[M]. 北京:机械工业出版社, 1989. 141
- [6] 吴序堂. 齿轮啮合原理[M]. 北京:机械工业出版社, 1982. 413
- [7] 吴从麟,唐余勇. 微分几何讲义[M]. 北京:高等教育出版社, 1985. 50~120
- [8] 张志涌. 精通 MATLAB6[M]. 第5版. 北京:北京航空航天大学出版社, 2003. 631
- [9] 赵亚平,魏文军,王书茂. 基于 Matlab 的交错轴斜齿锥齿面接触的计算机模拟[J]. 中国农业大学学报, 2004, 9(1): 81~83