

# 用极坐标矢量法设计空间凸轮廓线

连景岩 张云文

(中国农业大学 工学院,北京 100083)

**摘要** 针对空间凸轮廓线设计工作量大和设计精度较低的问题,以圆柱凸轮机构为例,提出用极坐标矢量解析法设计空间凸轮廓线。利用该方法推导出了空间凸轮廓线方程,采用 Matlab 软件编程计算,显示了凸轮廓线形状和凸轮压力角的变化情况。研究结果表明:当从动件运动规律一定时,随着从动件升程的增大,凸轮廓线变陡,有变尖的趋势,凸轮机构压力角也增大,动力性能变差;与传统图解法相比,极坐标矢量法设计空间凸轮廓线工作量减少了约 50%,并有利于凸轮廓线的精确数控加工。

**关键词** 极坐标矢量;解析法;空间凸轮;凸轮廓线;圆柱凸轮

**中图分类号** TH 133.4

**文章编号** 1007-4333(2005)02-0049-04

**文献标识码** A

## Design of a spatial cam contour by polar coordinate vectors

Lian Jingyan, Zhang Yunwen

(College of Engineering, China Agricultural University, Beijing 100083, China)

**Abstract** A new method, "polar coordinate vectors", for a spatial cam contour design was developed to simplify the traditional design procedure and improve its precision, by which the equations of a cylindrical cam contour, as an example, were deduced. The MatLab software was used for programming and calculating and the variations of the cam contour and the pressure angles were displayed. The results indicated that the cam contour became steeper and peaky as increasing of the rising displacement when the movement of the slave part. Comparing to the traditional graphic method, the workload of new method is about 50% less than that of the graphic method and it is more suitable for the numerical controlled manufacturing.

**Key words** polar coordinate vectors; analytical method; spatial cam; cam contour; cylindrical cam

凸轮机构可以实现任意不规则运动、动作准确可靠,因而广泛用于操纵、进给等机构<sup>[1]</sup>。近年来,随着自动机械、高速机械快速的发展,空间凸轮机构的应用越来越广泛,而且对空间凸轮廓线的设计和精确加工要求都较高<sup>[2-4]</sup>。

空间凸轮廓线的设计方法有图解法和解析法两大类<sup>[5]</sup>。图解法一般采用反转法,按比例作图求解,繁琐且误差较大,工程实际中应用较少。随着现代制造技术的推广应用,解析法日益得到普及,尤其是高速凸轮机构一般都采用比较精确的解析法设计廓线。目前,空间凸轮廓线解析方程主要是由坐标投影解析法解得。这种方法用于平面凸轮廓线的设计尚且可以,但用于空间凸轮廓线则分量较多,计算

量较大,容易出错。极坐标矢量法<sup>[6]</sup>可以方便地用于研究空间机构问题,优于其他解析法。利用该方法解决空间凸轮廓线问题的文献尚未见报道。笔者以圆柱凸轮机构为例,提出应用极坐标矢量解析法设计空间凸轮廓线,并采用 Matlab 软件编程计算和显示设计结果。

### 1 移动从动件圆柱凸轮廓线的设计

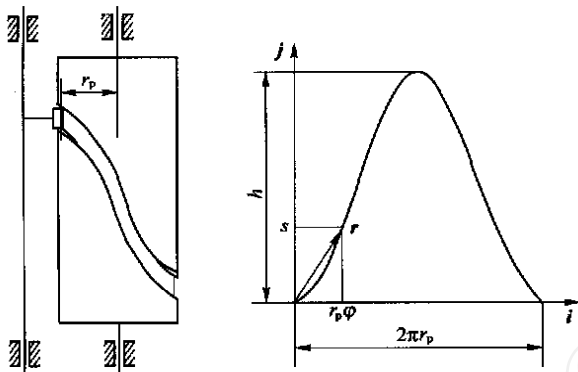
将移动从动件圆柱凸轮机构中的圆柱凸轮展开得到凸轮廓线,并建立直角坐标系(图 1)。

#### 1.1 推程廓线的设计

以  $s = f(\quad)$  和  $s = F(\quad)$  分别表示从动件的推程和回程运动规律。滚子中心轨迹为移动凸轮的理

收稿日期: 2004-11-19

作者简介: 连景岩,硕士研究生;张云文,副教授,主要从事机械设计及理论研究, E-mail: cloudwyb@p18.com



(a) 圆柱凸轮 (b) 凸轮廓线

$r_p$ —平均圆柱半径;  $\phi$ —凸轮转角;  $h$ —凸轮从动件行程;  
 $2\pi r_p$ —圆柱凸轮周长;  $r$ —凸轮廓线上任意一向径;  $s$ —  
 向径  $r$  在  $j$  轴的投影。下同。

图1 移动从动件圆柱凸轮及其展开后的凸轮廓线简图

Fig. 1 Cylindrical cam of reciprocating slider and its unwrapped cam profile

论廓线,实际廓线向径由理论廓线向径加减理论廓线法线方向上的滚子半径而得到<sup>[1,7]</sup>,即  $r_{实} = r + r_T n$ ,其中: $r_{实}$ 为凸轮实际廓线向径, $r$ 为凸轮理论廓线向径, $r_T$ 为滚子半径, $n$ 为凸轮廓线单位法向量。推程的理论廓线向径为  $r = r_p i + f(\phi) j$ ,切向量为  $\tau = r_p i + f(\phi) j$ ,则单位切向量为  $\frac{\tau}{|\tau|} = \frac{r_p i + f(\phi) j}{\sqrt{r_p^2 + (f(\phi))^2}}$ ,其中: $r_p$ 为平均圆柱半径, $\phi$ 为凸轮转角, $i$ 和 $j$ 分别为极坐标的横向和纵向极轴。

由于正交的2个向量的点积为0,即  $n \cdot \frac{\tau}{|\tau|} = 0$ <sup>[6]</sup>,

故单位法向量  $n = \frac{(f(\phi)) i - r_p j}{\sqrt{r_p^2 + (f(\phi))^2}}$ ,则推程的实际廓线向径为

$$r_{实} = r_p i + f(\phi) j \pm r_T \frac{(f(\phi)) i - r_p j}{\sqrt{r_p^2 + (f(\phi))^2}} = \left[ r_p \pm r_T \frac{f(\phi)}{\sqrt{r_p^2 + (f(\phi))^2}} \right] i + \left[ f(\phi) \mp r_T \frac{r_p}{\sqrt{r_p^2 + (f(\phi))^2}} \right] j \quad (1)$$

式(1)中实际廓线方程中的  $\pm$ 和  $\mp$ 表示凸轮的外包络线和内包络线。以下相同。

### 1.2 回程廓线的设计

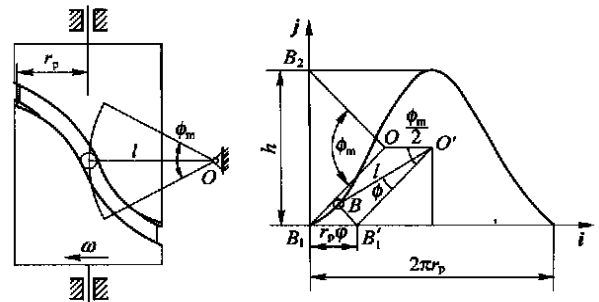
凸轮回程的理论廓线向径为  $r = (r_p + r_p) i + [h - F(\phi)] j$ ,切向量为  $\tau = r_p i - F(\phi) j$ ,则单位切向量为  $\frac{\tau}{|\tau|} = \frac{r_p i - F(\phi) j}{\sqrt{r_p^2 + (F(\phi))^2}}$ ,单位法向量为

$$n = \frac{-F(\phi) j - r_p i}{\sqrt{r_p^2 + (F(\phi))^2}}, \text{故凸轮回程实际廓线向径为}$$

$$r_{实} = (r_p + r_p) i + [h - F(\phi)] j \pm r_T \frac{-F(\phi) j - r_p i}{\sqrt{r_p^2 + (F(\phi))^2}} = \left[ r_p + r_p \mp \frac{r_T F(\phi)}{\sqrt{r_p^2 + (F(\phi))^2}} \right] i + \left[ h - F(\phi) \mp \frac{r_p r_T}{\sqrt{r_p^2 + (F(\phi))^2}} \right] j \quad (2)$$

## 2 摆动从动件圆柱凸轮廓线的设计

将摆动从动件圆柱凸轮展开,建立极坐标系(图2)。将滚子最低点  $B_1$  作为原点实施反转后,摆动点  $O$  沿  $i$  轴方向移动,同时,滚子中心将向上摆动  $\phi$ ,其中: $\omega$ 为圆柱凸轮角速度, $r_p$ 为摆中心移动距离, $l$ 为摆杆长度, $\phi_m$ 为最大摆角。分别以  $\phi = f(\phi)$ 和  $\phi = F(\phi)$ 表示摆杆推程和回程运动规律。



(a) 圆柱凸轮 (b) 凸轮廓线

$\omega$ —圆柱凸轮角速度;  $r_p$ —摆中心移动距离;  $l$ —摆杆长度;  
 $\phi_m$ —最大摆角;  $\phi$ —滚子中心摆角

图2 摆动从动件圆柱凸轮及其展开后的凸轮廓线简图

Fig. 2 Oscillating slider and its unwrapped cam profile

### 2.1 推程廓线的设计

凸轮推程的理论廓线向径为

$$r = \left[ r_p + l \cos \frac{\phi_m}{2} - l \cos \left( \frac{\phi_m}{2} - \phi \right) \right] i + \left[ l \sin \frac{\phi_m}{2} - l \sin \left( \frac{\phi_m}{2} - \phi \right) \right] j$$

单位切向量为

$$\frac{\tau}{|\tau|} = \frac{\left[ r_p - l f(\phi) \sin \left( \frac{\phi_m}{2} - \phi \right) \right] i + \left[ l f(\phi) \cos \left( \frac{\phi_m}{2} - \phi \right) \right] j}{\sqrt{r_p^2 - 2 r_p l f(\phi) \sin \left( \frac{\phi_m}{2} - \phi \right) + l^2 f(\phi)^2}}$$

由  $n \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = 0$  可得单位法向量

$$\mathbf{n} = \frac{\left[ l f(\phi) \cos\left(\frac{\phi_m}{2} - \phi\right) \right] \mathbf{i} - \left[ r_p - l f(\phi) \sin\left(\frac{\phi_m}{2} - \phi\right) \right] \mathbf{j}}{\sqrt{r_p^2 - 2 r_p l f(\phi) \sin\left(\frac{\phi_m}{2} - \phi\right) + l^2 f(\phi)^2}}$$

则凸轮推程的实际廓线向径

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{\text{实}} = & \left[ l \cos\left(\frac{\phi_m}{2} + r_p - l \cos\left(\frac{\phi_m}{2} - \phi\right)\right) \right] \mathbf{i} + \\ & \left[ l \sin\left(\frac{\phi_m}{2} - l \sin\left(\frac{\phi_m}{2} - \phi\right)\right) \right] \mathbf{j} \pm \\ r_T & \frac{\left[ l f(\phi) \cos\left(\frac{\phi_m}{2} - \phi\right) \right] \mathbf{i} - \left[ r_p - l f(\phi) \sin\left(\frac{\phi_m}{2} - \phi\right) \right] \mathbf{j}}{\sqrt{r_p^2 - 2 r_p l f(\phi) \sin\left(\frac{\phi_m}{2} - \phi\right) + l^2 f(\phi)^2}} \end{aligned} \quad (3)$$

### 2.2 回程廓线的设计

凸轮回程的理论廓线向径为

$$\mathbf{r} = \left[ r_p + r_p + l \cos\left(\frac{\phi_m}{2} - l \cos\left(\frac{\phi_m}{2} - \phi\right)\right) \right] \mathbf{i} + \left[ l \sin\left(\frac{\phi_m}{2} + l \sin\left(\frac{\phi_m}{2} - \phi\right)\right) \right] \mathbf{j}$$

单位切向量为

$$\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = \frac{\left[ r_p - l F(\phi) \sin\left(\frac{\phi_m}{2} - \phi\right) \right] \mathbf{i} - \left[ l F(\phi) \cos\left(\frac{\phi_m}{2} - \phi\right) \right] \mathbf{j}}{\sqrt{r_p^2 - 2 r_p l F(\phi) \sin\left(\frac{\phi_m}{2} - \phi\right) + l^2 F(\phi)^2}}$$

由  $n \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = 0$  得单位法向量

$$\mathbf{n} = \frac{- \left[ l F(\phi) \cos\left(\frac{\phi_m}{2} - \phi\right) \right] \mathbf{i} - \left[ r_p - l F(\phi) \sin\left(\frac{\phi_m}{2} - \phi\right) \right] \mathbf{j}}{\sqrt{r_p^2 - 2 r_p l F(\phi) \sin\left(\frac{\phi_m}{2} - \phi\right) + l^2 F(\phi)^2}}$$

则凸轮回程的实际廓线向径

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{\text{实}} = & \left[ r_p + r_p + l \cos\left(\frac{\phi_m}{2} - l \cos\left(\frac{\phi_m}{2} - \phi\right)\right) \right] \mathbf{i} + \\ & \left[ l \sin\left(\frac{\phi_m}{2} + l \sin\left(\frac{\phi_m}{2} - \phi\right)\right) \right] \mathbf{j} \pm \\ r_T & \frac{- \left[ l F(\phi) \cos\left(\frac{\phi_m}{2} - \phi\right) \right] \mathbf{i} - \left[ r_p - l F(\phi) \sin\left(\frac{\phi_m}{2} - \phi\right) \right] \mathbf{j}}{\sqrt{r_p^2 - 2 r_p l F(\phi) \sin\left(\frac{\phi_m}{2} - \phi\right) + l^2 F(\phi)^2}} \end{aligned} \quad (4)$$

### 3 空间凸轮轮廓线和凸轮机构压力角分析

采用 Matlab 软件编程, 绘图分析空间凸轮的廓线和压力角。以圆柱凸轮移动从动件采用正弦加速度运动规律为例, 其推程和回程运动规律分别为  $f(\phi) = h \left( \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \sin 3\phi \right)$  和  $F(\phi) = h \left( 1 - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \sin 3\phi \right)$ 。设定推程运动角  $\phi_m$  和回程运动角  $\phi_m$  均为  $\frac{2}{3}$ , 升程  $h$  分为 10、20 和 30 mm 3 种情况; 圆柱凸轮平均半径  $r_p = 30$  mm, 从动件滚子半径  $r_T = 8$  mm, 许用压力角  $[\phi] = 38^\circ$ 。

凸轮机构的压力角计算公式<sup>[8]</sup>为:  $\phi = \arctan\left(\frac{1}{r_p d} \frac{dS}{d\phi}\right) = \arctan\left[\frac{3h}{2 r_p} (1 - \cos 3\phi)\right]$ 。利用 Matlab 编程<sup>[9]</sup>计算凸轮轮廓线的极坐标值和凸轮机构的压力角, 绘制从动件升程  $h$  分别为 10、20 和 30 mm 时圆柱凸轮廓线展开图。

图 3 示出凸轮周长一定, 从动件升程  $h$  分别为 10、20 和 30 mm 时凸轮廓线的展开图。图 4 示出 3 种升程下圆柱凸轮机构推程压力角与凸轮转角的关系。当从动件运动规律一定, 升程  $h$  变大时, 凸轮

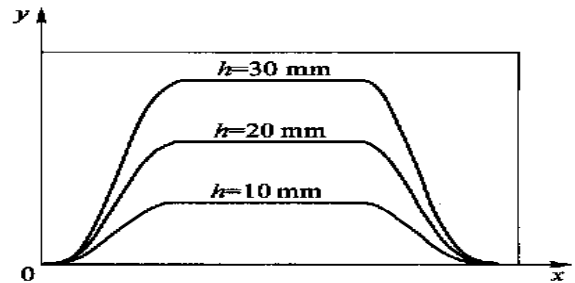


图 3 移动从动件圆柱凸轮廓线展开图

Fig. 3 Unwrapped cylindrical cam profile of reciprocating slider

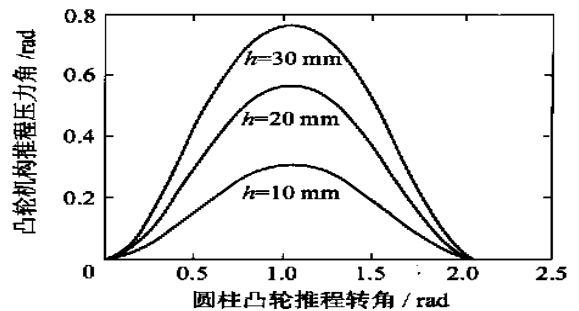


图 4 圆柱凸轮机构推程压力角与凸轮转角的关系

Fig. 4 Relationship between pressure angle and corner of cylindrical cam

廓线变陡,升程、回程与停歇段的廓线过渡处有变尖、运动失真的趋势;相应地压力角也变大,当升程过大,压力角就会大于许用压力角(本例中  $h = 30$  mm 时,压力角  $>$  许用压力角),机构动力性能变差<sup>[7]</sup>。

#### 4 结束语

以圆柱凸轮为例,应用极坐标矢量法设计空间凸轮廓线可以直接得出圆柱凸轮廓线向径的极坐标方程,进而应用 Matlab 软件分析凸轮廓线形状和凸轮压力角来检验所设计的凸轮廓线的性能。如果把圆向量和球向量引入空间凸轮廓线的设计中,并结合三维软件、程序语言进行优化设计可得到更理想的空间凸轮廓线。这将是计算机辅助空间凸轮廓线设计分析的一种新方法。

#### 参 考 文 献

[1] 申永胜. 机械原理教程[M]. 北京:清华大学出版社,

1999. 96 - 118

[2] 曹金汤. 凸轮机构设计[M]. 北京:机械工业出版社, 1985. 50 - 57

[3] 赵韩,丁爵曾,梁锦华. 凸轮机构设计[M]. 北京:高等教育出版社,1993. 20 - 180

[4] 邹慧君,董师予. 凸轮机构的现代设计[M]. 上海:上海交通大学出版社,1991. 100 - 205

[5] 方绍恩. 圆柱凸轮廓线设计的解析法[J]. 纺织基础科学学报,1994,7(2):157 - 160

[6] 梅向明,黄敬之. 微分几何[M]. 北京:人民教育出版社,1981. 10 - 50

[7] Tsay Lin. Profile determination of planar and spatial cams with cylindrical roller-followers[J]. Journal of Mechanical Engineering Science, 1996,210(6):565 - 574

[8] 朱孝录. 中国机械设计大典[M]. 江西:江西科学技术出版社,2001. 1644 - 1655

[9] 尹泽明,丁春利. 精通 MatLab 6[M]. 北京:清华大学出版社,2002. 198 - 213