

## 存在填隙二阶流体时两圆球相对运动阻力的解析解

徐春晖 黄文彬 徐泳

(中国农业大学 理学院,北京 100083)

**摘要** 在 Reynolds 润滑理论的基础上,采用小参数法,导出了存在填隙二阶流体时,两圆球相对运动时流体的速度场和压力方程,进而求出切向阻力和阻力矩的解析解。结果表明:由于二阶流体存在法向应力差,计算得到的流体速度场和压力分布比存在填隙牛顿流体时的情况要复杂得多;但两圆球相对运动时,因存在填隙二阶流体引起的切向阻力和阻力矩与存在填隙牛顿流体时的结果相同。

**关键词** 二阶流体;小参数法;润滑理论;阻力

**中图分类号** O 347.7; O 373

**文章编号** 1007-4333(2005)01-0086-04

**文献标识码** A

### Analytical solution to relatively moving resistance of two spheres with interstitial second-order fluid

Xu Chunhui, Huang Wenbin, Xu Yong

(College of Science, China Agricultural University, Beijing 100083, China)

**Abstract** Based on the Reynolds' lubrication approximation and the perturbation method, the velocity and the pressure equations for two relatively moving spheres with an interstitial second-order fluid was derived and the analytical solution to its resistances of the tangential force and the torque were obtained. The results indicate that there exist normal stress differences in a second-order fluid, so the equations of velocity and pressure are more complicated than that for a Newtonian fluid; however, their final results are the same as that for a Newtonian fluid.

**Key words** second-order fluid; the perturbation method; lubrication approximation; resistance

用离散元法模拟湿颗粒群细观力学行为的一个重要的理论基础是存在填隙流体时圆球颗粒间的相互作用规律。这些研究中球体被视为刚体,流体在其间缓慢流动。存在填隙流体时两圆球间的法向运动问题,即两圆球间流体的挤压流动。Stefan<sup>[1]</sup>最早对两圆盘间牛顿流体的挤压流动问题进行了研究<sup>[2,3]</sup>。相对于法向运动而言,两圆球相对错移时阻力的求解由于问题不存在轴对称性而变得复杂。O'Neill<sup>[4]</sup>最早得到了球与平壁间存在填隙牛顿流体时切向阻力和阻力矩的渐近解;Goldman<sup>[5]</sup>采用小参数法对此问题进行了进一步的研究,得到了压力分布、切向阻力和阻力矩的渐近解;李红艳<sup>[6]</sup>对存在填隙幂律流体时两圆球相对运动的情况进行了

分析,得到了阻力和阻力矩的解析解;Hocking等<sup>[7]</sup>研究了圆球间存在填隙牛顿流体且有滑移时圆球分别作法向、切向相对运动以及相对转动时的阻力渐近解;Hu H. H.等<sup>[8]</sup>研究了刚性圆球沿平壁移动、转动以及流体具有流速时压力分布的解析解,所选用的流体模型为二阶流体,但没有给出切向阻力和阻力矩的解。文献[9]中研究了圆球沿平壁平移时因存在填隙二阶流体而引起的切向阻力和阻力矩。有关存在填隙二阶流体时两圆球相对运动阻力的问题还未见报道。

#### 1 两圆球相对移动时流体的压力方程

考虑半径分别为  $R_1$  和  $R_2$  的上下两圆球,下圆

收稿日期: 2004-09-07

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10372113)

作者简介: 徐春晖,副教授,博士,主要从事断裂力学及散体力学的研究, E-mail: chunhui@cau.edu.cn

球静止,上圆球相对于下球以法向速度  $v_n$ , 水平速度  $v_t$  缓慢移动(图 1), 两圆球的最小间隙为  $s_0$ , 且  $s_0 \ll \min(R_1, R_2)$ , 两圆球间存在填隙二阶流体。为计算方便, 此问题采用柱坐标系  $(r, \theta, z)$ , 且  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ 。由于  $s_0 \ll \min(R_1, R_2)$ , 所以可以假设压力分布  $p$  与  $z$  无关, 即  $p = p(r, \theta)$ , 其中  $0 \leq r \leq B, B$  为流体已知参考压力的边界。在轴对称坐标系下, 两球面  $S_1$  和  $S_2$  可近似表达为  $z = z_1(r) = s_0 + \frac{r^2}{2R_1}$  和  $z = z_2(r) = -\frac{r^2}{2R_2}$ , 则两圆球间隙为  $s(r) = s_0 + \frac{r^2}{2R^*}$ , 其中:  $z_1$  和  $z_2$  分别为两球表面坐标;  $R^*$  为谐调平均半径,  $(R^*)^{-1} = (R_1)^{-1} + (R_2)^{-1}$ 。

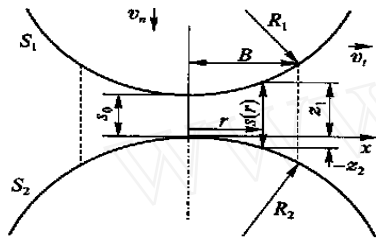


图 1 两圆球相对移动示意图

Fig. 1 Slow relative motion of two spheres

由于两圆球相对缓慢运动, 故惯性力可忽略。根据润滑理论, 柱坐标系下忽略体力 and 惯性力时运动方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial r} &= \frac{\partial S_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial S_r}{\partial \theta} + \frac{S_{rr} - S}{r} + \frac{\partial S_{rr}}{\partial z} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial S}{\partial \theta} + \frac{\partial S_r}{\partial r} + \frac{\partial S_z}{\partial z} + \frac{2S_r}{r} \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中:  $S_{rr}, S$  和  $S_{zz}$  为法向偏应力分量,  $S_{rz}, S_r$  为剪应力分量。

圆球表面上的速度边界条件为

$$\left. \begin{aligned} v_r &= v_t \cos \theta, \quad v_\theta = -v_t \sin \theta, \quad v_z = v_n & z = z_1 \\ v_r &= 0, \quad v_\theta = 0, \quad v_z = 0 & z = z_2 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

其中  $v_r, v_\theta$  和  $v_z$  分别为  $r, \theta$  和  $z$  方向上的速度分量。

二阶流体满足以下本构关系

$$S = \mu_0 A_1 + \alpha_1 (A_1)^2 + \alpha_2 A_2 \quad (3)$$

其中:  $S$  为偏应力张量,  $A_1$  和  $A_2$  分别为一阶和二阶 Rivlin-Ericksen 张量,  $\mu_0, \alpha_1$  和  $\alpha_2$  为流体的物质

常数, 且  $\alpha_1 = \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 = -\frac{1}{2} \alpha_1$ , 这里  $\alpha_1$  和  $\alpha_2$  分别为第一和第二法向应力差系数。由于两圆球间隙处的流体主要承受剪切变形, 所以在计算中只保留主要项  $\frac{\partial v_r}{\partial z}, \frac{\partial v_\theta}{\partial z}$ , 将  $De$  看成小参数(对于二阶流体,  $De = \frac{\mu_0 v_t^{(10)}}{\mu_0 R^*}$ )。假定独立变量可展开为

$$\left. \begin{aligned} v_r &= v_{r0} + Dev_{r1} + \dots \\ v_\theta &= v_{\theta0} + Dev_{\theta1} + \dots \\ v_z &= v_{z0} + Dev_{z1} + \dots \\ p &= Dep_1 + \dots \end{aligned} \right\}$$

设  $v_{r0}, v_{\theta0}$  满足边界条件式(2),  $v_{r1}, v_{\theta1}$  满足零边界条件, 计算得二阶流体速度场

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{v_t(z-z_2)}{s(r)} \cos \theta + \frac{1}{2\mu_0} (z-z_1)(z-z_2) \frac{\partial p}{\partial r} + \\ &\quad \alpha_1 (z-z_1)(z-z_2) \frac{rv_t \cos^2 \theta}{s^3(r)} \\ v_\theta &= -\frac{v_t(z-z_2)}{s(r)} \sin \theta + \frac{1}{2\mu_0} (z-z_1)(z-z_2) \cdot \\ &\quad \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} - \alpha_1 (z-z_1)(z-z_2) \frac{rv_t \sin \theta \cos \theta}{s^3(r)} \end{aligned}$$

流体假设为不可压缩, 其不可压缩条件为

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

对不可压缩条件从  $z_2$  到  $z_1$  积分, 则可得流体的压力方程为

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} &+ \left( \frac{3r}{R^* s(r)} + \frac{1}{r} \right) \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} = \\ &- \frac{12\mu_0 v_n}{s^3(r)} - \frac{6\mu_0 v_t r}{s^3(r)} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \cos \theta - \frac{2v_t^2}{R^* s^3(r)} \end{aligned} \quad (4)$$

式(4)为关于压力  $p$  的微分方程, 其边界条件为当  $r = B$  时,  $p = 0$ , 一般可取  $B = B^*$ 。方程(4)中, 当  $\alpha_1 = 0$  时, 退化为两圆球相对运动时填隙牛顿流体的压力方程, 即

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} &+ \left( \frac{3r}{R^* s(r)} + \frac{1}{r} \right) \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} = \\ &- \frac{12\mu_0 v_n}{s^3(r)} - \frac{6\mu_0 v_t r}{s^3(r)} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \cos \theta \end{aligned} \quad (5)$$

李红艳<sup>[6]</sup>研究了存在填隙幂律流体时两圆球相对运动问题, 得到了压力方程表达式。当幂指数为 1 时, 即由幂律流体退化为牛顿流体, 其压力方程的表达形式与式(5)完全相同。

## 2 压力分析

定义量纲 1 参数

$$\left. \begin{aligned} p_0 &= \frac{12\mu_0 v_t B}{s_0^2} \\ p^* &= \frac{p}{p_0} \\ c &= \frac{B^2}{2R^* s_0} \\ t &= \frac{r}{B} \\ \bar{s}(t) &= \frac{s(t)}{s_0} = 1 + ct^2 \\ &= \frac{2R^*}{R_1} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

分析压力方程(4)可以看出,等式右边第 1 项与两圆球法向相对运动有关,而第 2 和第 3 项与两圆球切向相对运动有关,其中第 3 项与法向应力差有关。为此,在求解压力时,可以将其适当分解。设量纲为 1 的压力  $p^*$  可以分解为  $p^* = p_2 \cos \theta + p_3 + p_4$ , 因此  $p_2, p_3$  和  $p_4$  分别满足方程

$$\frac{\partial^2 p_2}{\partial t^2} + \left( \frac{6ct}{s} + \frac{1}{t} \right) \frac{\partial p_2}{\partial t} - \frac{p_2}{t^2} = -\frac{ct}{s^3} (\theta - 1) \quad (7a)$$

$$\frac{\partial^2 p_3}{\partial t^2} + \left( \frac{6ct}{s} + \frac{1}{t} \right) \frac{\partial p_3}{\partial t} = -\frac{De-1}{6} \frac{R^*}{s_0} \frac{1}{s^3} \quad (7b)$$

$$\frac{\partial^2 p_4}{\partial t^2} + \left( \frac{6ct}{s} + \frac{1}{t} \right) \frac{\partial p_4}{\partial t} = -\frac{\nu_0 R^*}{\nu_t s_0} \frac{1}{s^3} \quad (7c)$$

求解式(7a) - (7c)得量纲 1 压力分布  $p^*$  为

$$\begin{aligned} p^* &= \frac{t(\theta - 1)}{10(1 + ct^2)^2} \cos \theta - \\ &\frac{De-1}{48c} \frac{B}{2s_0} \left[ \frac{1}{(1 + ct^2)^2} - \frac{1}{(1 + c)^2} \right] - \\ &\frac{1}{8c} \frac{\nu_0 B}{\nu_t s_0} \left[ \frac{1}{(1 + ct^2)^2} - \frac{1}{(1 + c)^2} \right] \end{aligned} \quad (8)$$

分析式(8)可以看出:当两圆球相对运动,存在填隙二阶流体时,量纲 1 压力分布可以分解为 3 部分:第 1 部分与存在填隙牛顿流体时两圆球相对错移的量纲 1 压力分布相同。第 2 部分是由切向错移引起,压力与二阶流体系数有关,即与二阶流体的法向应力差有关;当退化为牛顿流体时,此项为 0。第 3 部分与两圆球的相对法向运动有关。式(8)等号右边第 1 项为两圆球相对平移时,填隙牛顿流体的压力方程;当  $\theta = 2$  时,退化为圆球沿平行于平面壁缓慢移动的问题,Howard<sup>[5]</sup>给出了存在填隙牛顿流

体时问题的解析解  $p_2 = \frac{t}{10(1 + ct^2)^2}$ , 与本文结果相同。

## 3 流体黏性引起的阻力和阻力矩

球面  $z = s(r)$  微元上沿  $x$  方向的力分量  $dF_x = dF_r \cos \theta - dF \sin \theta$ , 其中  $dF_r$  和  $dF$  分别为球面  $z = s(r)$  微元上沿  $r$  方向和  $\theta$  方向的力分量。圆球沿  $x$  方向的阻力等于对  $dF_x$  的积分  $F_x = \int_0^{B/2} \int_0^{2\pi} dF_x = -6\mu_0 \nu_t R^* f_x(c)$ , 式中  $f_x$  为量纲 1 切向阻力

$$f_x(c) = \frac{c}{3} \int_0^1 \left[ 24cp_2 t^2 + \frac{2t}{s} + 6s \frac{\partial p_2}{\partial t} t + 6\bar{s} p_2 \right] dt = \frac{3}{15} \ln(1 + c) \quad (9)$$

可见,存在二阶流体时切向阻力只与  $p_2$  有关,而与  $p_3$  和  $p_4$  无关,其结果与存在填隙牛顿流体时圆球切向运动阻力结果相同。与法向应力差有关的压力和由于法向运动引起的压力在积分时结果等于 0, 对切向阻力无影响。当  $\theta = 2$  时,退化为圆球沿平行于平面壁缓慢移动的问题,量纲 1 切向阻力为

$$f_x(c) = \frac{8}{15} \ln(1 + c) \quad (10)$$

O'Neil<sup>[4]</sup>研究了圆球沿平行于平面壁缓慢移动的问题,得到的近似解在球与壁间隙接近 0 的时候有奇异性

$$f_x(c) = \left[ \left( \frac{8}{15} + \frac{128}{375c} \right) \ln c + 0.58461 + O\left(\frac{1}{c}\right) \right] \quad (11)$$

Goldman<sup>[5]</sup>研究了与 O'Neil<sup>[4]</sup>相同的问题,得到的压力分布为渐近解,对压力积分求切向阻力时,在  $r = 0$  处有奇异性,其切向阻力渐近解为

$$f_x(c) = \frac{8}{15} \ln(2c) \quad (12)$$

图 2 给出了形态比  $c$  对量纲 1 切向阻力  $f_x(c)$  的影响。可以看出,切向阻力随  $c$  的增大而增大。本文结果与文献[4]和[5]的渐近解相比有一定的区别,这是由于文献[4]和[5]在遇到有奇异性的积分时,采取了不同的处理方法,而本文则是精确积分得到的结果。

圆球所受的阻力矩为球面  $z = s(r)$  微元上沿  $y$  方向的阻力矩  $dM_y$  的积分

$$M_y = \int_0^{B/2} \int_0^{2\pi} dM_y = 8\mu_0 \nu_t (R^*)^2 m_y(c)$$

其中  $m_y$  为量纲 1 阻力矩

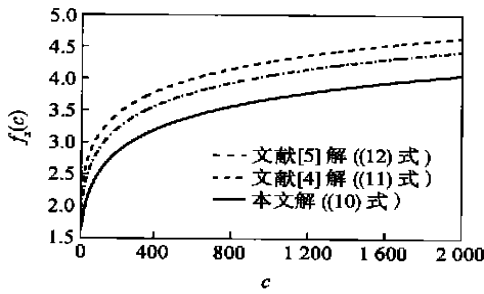


图 2 形态比  $c$  对量纲 1 切向阻力  $f_x(c)$  的影响

Fig. 2 Effect of dimensionless parameters  $c$  on  $f_x(c)$

$$m_y(c) = 2c \int_0^1 \left( \frac{2t}{s} + 6s \frac{\partial p_2}{\partial t} t + 6s p_2 \right) dt = \frac{(-3 + 8)\ln(1+c)}{20} + \frac{3(-1)}{10(1+c)} \quad (13)$$

同样,当  $\beta = 2$  时退化为圆球沿平行于平面壁缓慢移动的问题,量纲 1 切向阻力矩为

$$m_y(c) = \frac{1}{10} \ln(1+c) + \frac{3}{10(1+c)} \quad (14)$$

文献[4]的切向阻力矩在球与壁间隙接近 0 时也有奇异性,结果为

$$m_y(c) = \left( \frac{1}{10} + \frac{0.086}{c} \right) \ln(4c) - 0.262 \quad (15)$$

文献[5]的切向阻力矩结果为

$$m_y(c) = \frac{1}{10} \ln(2c) \quad (16)$$

图 3 给出了形态比  $c$  对量纲 1 切向阻力矩  $m_y$  的影响。可以看出阻力矩随  $c$  的增大而增大。本文结果与文献[4]的解及文献[5]的渐近解相比有一定的区别,原因与求切向阻力时的相同。

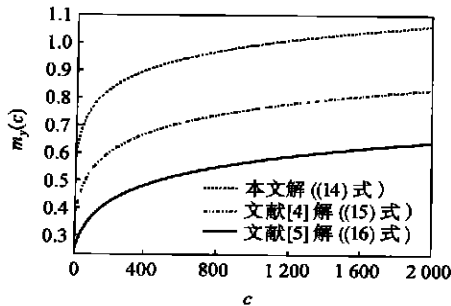


图 3 形态比  $c$  对量纲 1 切向阻力矩  $m_y$  的影响

Fig. 3 Effect of dimensionless parameters  $c$  on  $m_y$

#### 4 结束语

本研究基于 Reynolds 润滑理论,采用小参数

法,导出了存在填隙二阶流体时,两刚性圆球相对移动流体的速度场和压力方程,并求解得到了切向阻力和阻力矩。计算过程中,略去了二阶以上的小量,得到的速度场及压力分布形式虽然相对复杂,但在求切向阻力和阻力矩时,与二阶流体有关的项及与法向运动有关的项积分结果为 0,所以得到两圆球相对运动时切向阻力和阻力矩结果与存在牛顿流体时的阻力和阻力矩相同。

由于计算采用了近似算法,其适用范围还有待进一步验证;另外,由于得到的阻力和阻力矩结果为解析解,所以可以直接写入离散元程序进行计算。

#### 参 考 文 献

- [1] Bird R B, Armstrong R C, Hassager O. Dynamics of Polymeric Liquids [M]. New York: Wiley, 1977: 19 - 21
- [2] Xu Chunhui, Huang Wenbin, Xu Yong. Squeeze flow of a second-order fluid between two parallel disks with wall slip[J]. Transactions of the CSAE, 2002, 18(5): 19 - 22
- [3] 黄文彬,徐泳,练国平,等. 存在滑移时两球间的幂率流体挤压流动[J]. 应用数学和力学, 2002, 23(7): 722 - 728
- [4] O'Neill M E, Stewartson K. On the slow motion of a sphere parallel to a nearby plane wall[J]. Non-Newtonian Fluid Mech, 1967, 27: 705 - 724
- [5] Goldman A J, Cox R G, Brenner H. Slow viscous motion of a sphere parallel to a plane wall-(I) Motion through a quiescent fluid[J]. Chemical Engineering Science, 1967, 22: 673 - 651
- [6] 李红艳. 离散元干-湿颗粒模型研究及应用[D]. 北京: 中国农业大学, 2004
- [7] Hocking L M. The effect of slip on the motion of a sphere close to a wall and two adjacent spheres [J]. Journal of Engineering Mathematics, 1973, 7(3): 207 - 221
- [8] Hu H H, Joseph D D. Lift on sphere near a plane wall in a second-order fluid [J]. Non-Newtonian Fluid Mech, 1999, 88: 173 - 184
- [9] 徐春晖,黄文彬,徐泳. 填隙二阶流体下圆球平行与壁平移的粘性阻力[J]. 力学季刊, 2003, 24(4): 500 - 505
- [10] 陈文芳. 非牛顿流体力学[M]. 北京: 科学出版社, 1984: 83 - 91