

散乱数据光顺拟合的SOR方法

经玲 王 琳

(中国农业大学 理学院,北京 100083)

摘 要 针对 CAGD 中散乱数据光顺拟合的一般模型的求解问题,采用罚函数方法处理几何约束,根据最优性条件,将反映曲面光顺性的泛函极小化问题,离散化为曲面参数域网格点上的九点差分格式,得到了关于拟合曲面在网格点上函数值的线性方程组,并证明了该线性方程组的系数矩阵对称正定的性质,保证了采用超松弛法求解线性方程组的收敛性。为了验证所提出方法的有效性,对空间散乱分布的 14 个数据点,当模型参数取不同值时,分别进行了拟合。试验结果表明,用超松弛法能够简单快速实现散乱数据点的光顺拟合。

关键词 光顺; 罚函数法; 差分格式; 迭代法

中图分类号 O 241.43; TP 31.43

文章编号 1007-4333(2004)06-0085-04

文献标识码 A

SOR method for smoothing of scattered data

Jing Ling, Wang Long

(College of Science, China Agricultural University, Beijing 100083, China)

Abstract Given a set of scattered three-dimensional points, we proposed the Successive Over Relaxation Method (SOR) for surface fitting and smoothing scattered data. The problem was actually the minimum one of quadratic functionalizing about surface smoothness. Nine-point difference schemes of surface functional values at parameter gridding points were obtained according to optimal condition. We treated the constraints with penalty function method after quadratic functional being discrete. The property of symmetric and positive coefficient matrix of linear equations was proved. Then the SOR method converged for any choice of initial vector. The method can be used in the field where smoothing shape is desired by interpolating or approximating a given scattered point set. Numerical examples from simulated and real data were presented to show the efficiency of the new method.

Key words smoothing; penalty function; difference scheme; iteration method

光顺问题是 CAGD 中的经典问题之一,在曲面造型中占有重要地位。光顺问题是指微调曲面的形状,在其形状变化不超过给定约束的前提下,使曲面变得更加光滑。这里的约束通常是指曲面上一批散乱的数据点的几何约束。光顺准则涉及到几何外形的美观性,其提法有许多种^[1~4],其中文献[4]推广了文献[1]~[3]的光顺准则,采用了更一般的形式,即对于曲面 $u = (x, y), (x, y) \in \mathbf{R}^2$,光顺准则定义为:

$$E(u) = \iint \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \right]$$

$$\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 \right] dx dy \quad (1)$$

式(1)中不仅含有一阶偏导数项,还含有二阶偏导数项,其中的 $\alpha_i, \beta_i \in \mathbf{R} (i=1,2)$ 分别相当于拉伸刚度和弯曲刚度,控制着曲面的拉伸和弯曲变形。

二维散乱数据光顺拟合的数学问题描述是:设 $f(x, y) \in C^2(\Omega)$,其中 $\Omega = [a, b] \times [c, d]$ 为有界矩形域。由定义域 Ω 的等距分划: $x_i = a + ih, i = 0, 1, \dots, I, h = (b - a) / I; y_j = c + jk, j = 0, 1, \dots, J, k = (d - c) / J$ 得到关于 (x, y) 的离散指标集合 $N = \{(i, j) | i = 0, 1, \dots, I; j = 0, 1, \dots, J\}$ 。设存在

收稿日期: 2004-04-19

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10371131)

作者简介: 经玲,副教授,主要从事运筹与优化、计算几何的研究, E-mail: jingling_aaa@163.com

N 的子集 $K_{ij} = \{ (l_k, m_k) \mid k = 1, 2, \dots, N \}$ 和有限实数集 $Z = \{ z_1, z_2, \dots, z_N \}$, 对任意 $(l_k, m_k) \in K_{ij} \subset N$, 有 $z_k \in Z$, 使 $f(x_{l_k}, y_{m_k}) = z_k (k = 1, 2, \dots, N)$, 求二元函数 $u(x, y)$, 使

$$\min_{u(x,y)} E(u) \tag{2}$$

满足

$$u_{l_k, m_k} = z_k, \quad k = 1, 2, \dots, N \tag{3}$$

文献[3]仅对光顺准则式(1)中 $\alpha = \beta = 0$ 这种特殊情况, 以及问题(2)和(3)的SOR法求解问题进行了

$$\min_{u_{i,j}} \left[\sum_{j=0}^{J-1} \sum_{i=0}^{I-1} \left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h} \right)^2 + \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} \left(\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{q} \right)^2 + \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{i=0}^{I-1} \left(\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} \right)^2 + \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=1}^{J-1} \left(\frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{q^2} \right)^2 \right] \tag{4}$$

满足 $u_{l_k, m_k} = z_k, k = 1, 2, \dots, N$ 。由最优性条件, 得内部结点 $u_{i,j}$ 上的九点差分格式

$$w_{i,j} u_{i,j} = \left(\frac{1}{h^2} + \frac{4}{h^4} \right) (u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) + \left(\frac{2}{q^2} + \frac{4}{q^4} \right) (u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) - \frac{1}{h^4} (u_{i-2,j} + u_{i+2,j}) - \frac{2}{q^4} (u_{i,j-2} + u_{i,j+2}) \tag{5}$$

式中 $w_{i,j} = \left(\frac{2}{h^2} + \frac{2}{q^2} + \frac{6}{h^4} + \frac{6}{q^4} \right), i = 2, 3, \dots, I-2, j = 2, 3, \dots, J-2$ 。在边界两层结点上将导出特殊的差分格式, 例如对于 $i = 0, j = 0$, 有

$$\min \left[\sum_{j=0}^{J-1} \sum_{i=1}^{I-1} \left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h} \right)^2 + \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} \left(\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{q} \right)^2 + \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{i=1}^{I-1} \left(\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} \right)^2 + \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=1}^{J-1} \left(\frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{q^2} \right)^2 + \sum_{k=1}^N (u_{l_k, m_k} - z_k)^2 \right] \tag{6}$$

式中 $\lambda > 0$ 为罚因子。根据最优性条件, 当 $(i, j) \in K_{ij}$ 且属于内部结点时, 由式(6)导出与式(5)相同的差分格式; 当 $(i, j) \in K_{ij}$ 且属于内部结点时, 相应的差分格式变为

$$(w_{i,j} + \lambda) u_{i,j} = \left(\frac{1}{h^2} + \frac{4}{h^4} \right) (u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) + \left(\frac{2}{q^2} + \frac{4}{q^4} \right) (u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) - \frac{1}{h^4} (u_{i-2,j} + u_{i+2,j}) - \frac{2}{q^4} (u_{i,j-2} + u_{i,j+2}) + z_k \tag{7}$$

将式(7)两端同除罚因子 λ , 并令 $\lambda \rightarrow \infty$, 得

$$u_{i,j} = z_k \tag{8}$$

讨论; 文献[4]和[5]讨论了用有限元方法求解问题(2)和(3); 但用有限元方法计算比较复杂, 对某些要求快速设计曲面的目标是不宜的。本文中首先对式(2)离散化, 根据最优性条件导出了九点差分格式, 然后用罚函数的方法处理约束条件式(3), 并进一步讨论了用SOR法求解问题(2)和(3)的收敛性问题。

1 数据光顺拟合问题的离散化

将二次泛函 $E(u)$ 离散化, 可得式(2)的离散化模型

$$\left(\frac{1}{h^2} + \frac{2}{q^2} + \frac{1}{h^4} + \frac{2}{q^4} \right) u_{0,0} = \left(\frac{1}{h^2} + \frac{2}{h^4} \right) u_{1,0} + \left(\frac{2}{q^2} + \frac{2}{q^4} \right) u_{0,1} - \frac{1}{h^4} u_{2,0} - \frac{2}{q^4} u_{0,2}$$

所有等式组成了大型线性方程组。对于约束条件的处理, 通常的做法是对 $(i, j) \in K_{ij}$, 去掉方程组中左端含 $u_{i,j}$ 的方程, 再将其余方程中的 $u_{i,j} = u_{l_k, m_k} = z_k$ 代入。这种处理方法改变了大型线性方程组的系数矩阵, 而且使求解方程组的算法更为复杂。

2 约束条件的处理及用SOR法求解的收敛性

用罚函数法处理约束条件式(3)得

类似地, 当 $(i, j) \in K_{ij}$ 且属于边界两层的结点时, 也可得到式(8), 故当罚因子 λ 取充分大时, 式(6)是约束条件的近似。

记 $L = |N| = (I+1) \times (J+1)$, 由于离散化后的式(4)的目标函数为 L 个变元的二次齐次多项式, 写成矩阵形式为 $\min_{U \in \mathbf{R}^L} E(U) = U^T F U$, 式中 F 为 $L \times L$ 的对称阵。将约束条件写为 $EU = P$, 式中 $E \in \mathbf{R}^{N \times L}, P = \{ z_1, z_2, \dots, z_N \}^T$ 用罚函数法处理约束条件得

$$\min_{U \in \mathbf{R}^L} E(U) = U^T F U + \lambda (EU - P)^T (EU - P) \tag{9}$$

根据最优性条件得

$$\nabla(U^T F U + (E U - P)^T (E U - P)) = 2 F U + 2 E^T (E U - P) = 0$$

即

$$(F + E^T E) U = E^T P \quad (10)$$

定理 1 和 2 说明用 SOR 迭代法求解方程组 (10) 的收敛性。

定理 1 方程组 (10) 中的系数矩阵 $F + E^T E$ 为对称正定矩阵。

证明:根据 F 的对称性可知 $F + E^T E$ 为对称矩阵。下面证明 $F + E^T E$ 是非奇异阵。

假设结论不成立,则存在非零向量 U ,使 $(F + E^T E) U = 0$,从而 $U^T (F + E^T E) U = 0$,即

$$U^T F U + (E U)^T (E U) = 0 \quad (11)$$

式(11)的具体形式为

$$\sum_{j=0}^{J-1} \sum_{i=0}^{I-1} \left[\frac{(u_{i+1,j} - u_{i,j})^2}{h^2} + \frac{(u_{i,j+1} - u_{i,j})^2}{q^2} \right] + \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{i=0}^{I-1} \left[\frac{(u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1})^2}{q^2} + \frac{(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j})^2}{h^2} \right] + \sum_{k=1}^N u_{l_k, m_k}^2 = 0 \quad (12)$$

由于式(12)左端均为平方项,所以

$$\begin{cases} u_{i+1,j} - u_{i,j} = 0, i=0,1, \dots, I-1; j=0,1, \dots, J \\ u_{i,j+1} - u_{i,j} = 0, i=0,1, \dots, I; j=0,1, \dots, J-1 \\ u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j} = 0, i=0,1, \dots, I-1; j=0,1, \dots, J \\ u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1} = 0, i=0,1, \dots, I; j=0,1, \dots, J-1 \\ u_{l_k, m_k} = 0, k=1,2, \dots, N \end{cases}$$

由此可知对于任意 $(i, j) \in N$, 均有 $u_{i,j} = 0$, 即 $U = 0$ 。而这与假设 U 是非零向量相矛盾,故 $F + E^T E$ 非奇异。由于式(12)左端大于 0, 即对任意 L 维非零向量 U , 有

$$U^T (F + E^T E) U > 0$$

所以 $F + E^T E$ 为对称正定矩阵。

定理 2 方程组 (10) 有惟一解,且当 $0 < \omega < 2$ 时, SOR 迭代法收敛。

证明:由定理 1 可知方程组 (10) 的系数矩阵对称正定,根据文献[6],当 $0 < \omega < 2$ 时, SOR 迭代法收敛。

3 数值试验

将平面矩形区域 $\Omega = [77, 194] \times [-81, 143]$ 剖分为 14×15 网格,分划为

$$x_i = 77 + ih, i = 0, 1, \dots, 13; h = (194 - 77) / 13 = 9$$

$$y_j = -81 + jq, j = 0, 1, \dots, 14; q = (143 + 81) / 14 = 16$$

记 $u_{i,j} = u(x_i, y_j), (i, j) \in N = \{(i, j) | i = 0, 1, \dots, 13; j = 0, 1, \dots, 14\}$, 当 $(l_k, m_k) \in N$ 时,

$u_{l_k, m_k} = z_k (k = 1, 2, \dots, 14)$ 的数据由表 1 给出。用

MA TLAB 语言计算出函数 $u(x, y)$ 的离散值。图 1 为光滑拟合前空间散乱数据点的分布图;图 2 示出光滑准则中参数 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ 取不同值时光顺拟合后的二维网格曲面图。

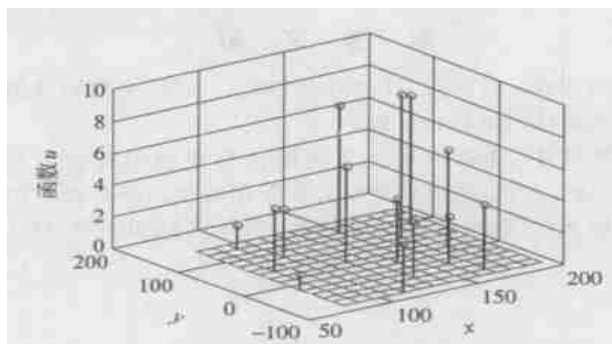


图 1 光滑拟合前空间散乱数据点分布图

Fig. 1 The position of scattered points before fitting

表 1 光滑拟合前空间散乱分布的离散数据点

Table 1 The three - dimensional scattered points before fitting

数据编号 k	横坐标编号 l_k	纵坐标编号 m_k	竖坐标值 z_k	数据编号 k	横坐标编号 l_k	纵坐标编号 m_k	竖坐标值 z_k	数据编号 k	横坐标编号 l_k	纵坐标编号 m_k	竖坐标值 z_k
1	5	1	3.0	6	8	6	4.0	11	4	11	3.0
2	11	2	4.0	7	12	7	6.0	12	13	12	8.0
3	7	3	3.5	8	6	8	6.0	13	9	13	8.0
4	10	4	3.0	9	2	9	3.0	14	3	14	1.5
5	1	5	1.0	10	11	10	9.0				

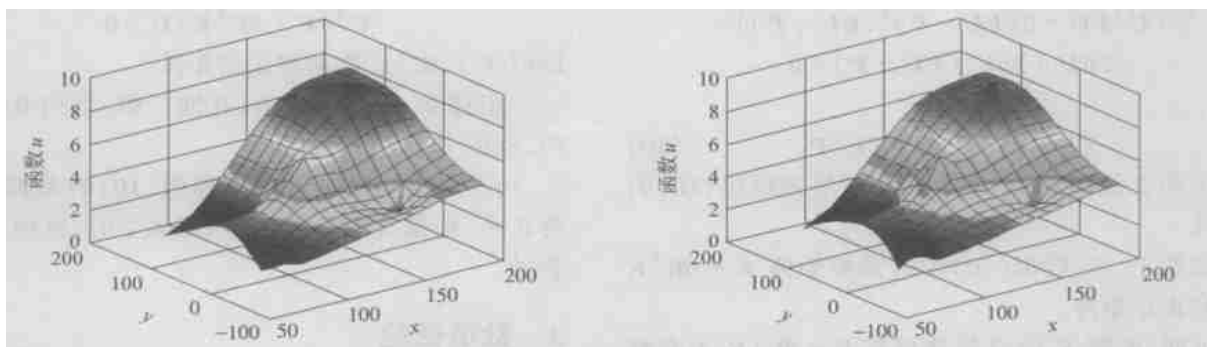
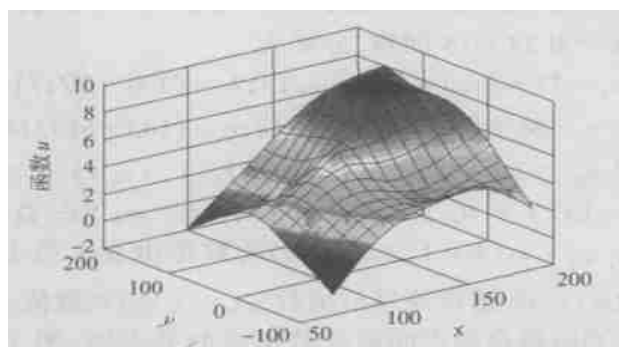
(a) $\alpha_1 = \alpha_2 = 1, \beta_1 = \beta_2 = 100$ (b) $\alpha_1 = \alpha_2 = 100, \beta_1 = \beta_2 = 1$ (c) $\alpha_1 = \alpha_2 = 1, \beta_1 = \beta_2 = 100$

图2 不同参数下光滑拟合后的二维网格曲面图

Fig. 2 The fitting surfaces with different parameter values

参 考 文 献

- [1] 苏步青, 刘鼎元. 计算几何[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1981. 17 ~ 227
- [2] 施法中. 计算机辅助几何设计与非均匀有理 B 样条[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 1994. 96 ~ 106
- [3] 钟尔杰. 散乱数据插值的迭代算法[J]. 电子科技大学

学报, 2001, 30(1): 91 ~ 94

- [4] 经玲, 席平, 唐荣锡. 应用可变形模型进行曲线曲面光滑[J]. 软件学报, 1998, 9(6): 464 ~ 468
- [5] Celniker G, Gossard D. Deformable curve and surface finite elements for free-form shape design[J]. Computers & Graphics, 1991, 25(4): 257 ~ 266
- [6] 李庆杨, 王能超, 易大义. 数值分析[M]. 第4版. 北京: 清华大学出版社, 2001. 240 ~ 252