

多体系统碰撞点自动搜索方法

金俐 王琪 陆启韶 梅树立

(北京航空航天大学 理学院,北京 100083)

摘要 针对多体系统动力学方程不适用于碰撞过程动力学分析的情况,提出一种通过对正则形式的多体系统动力学方程积分而得到的,适用于多体系统碰撞分析的动量平衡冲量方程。对于非定点碰撞的多体系统碰撞问题,以2单摆组成的多体系统为例,给出一种当多体系统在运动过程中碰撞点不确定且有多多个可能碰撞点的情况下,碰撞点位置的自动搜索方法。

关键词 正则方程;碰撞;动量平衡冲量;碰撞点;自动搜索

中图分类号 O 313.4

文章编号 1007-4333(2004)01-0057-03

文献标识码 A

An automatic searching method for collision points of multibody systems

Jin Li, Wang Qi, Lu Qishao, Mei Shuli

(School of Science, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

Abstract The impulse-momentum equations were introduced by integrating the canonical equations of multibody systems which are not valid for the dynamics analysis in the impacting processes. A method of automatic searching collision positions was given in multibody impact systems with nonfixed collision positions and many kinds of collision positions, such as the multibody systems consisted of two single pendulums.

Key words canonical equation; impact; impulse-momentum; collision position; automatic search

通常,多体系统动力学方程只适用于连续运动状态,而非光滑的多体系统碰撞问题的研究通常采用分段分析方法。为此,笔者提出一种通过对正则形式的多体系统动力学方程的积分而得到的,适用于多体系统碰撞分析的动量平衡冲量方程^[1,2]。目前,多体系统碰撞动力学研究多集中于碰撞点固定不变的碰撞问题,而实际问题中的大量多体系统碰撞现象,碰撞点随时间不同而居于不同位置:因此,准确确定系统运动过程中碰撞点位置,给出有效数值算法,对多体系统动力学研究具有重要意义。目前尚未见有关自动搜索多体系统碰撞点问题的研究报道^[5]。本文中,以2个单摆系统组成的碰撞多体系统为例,给出该系统在运动过程中碰撞点位置的搜索方法。

1 正则形式的多体系统碰撞动力学方程

1.1 正则形式的 Lagrange 方程

对于具有定常、完整约束的多体系统,设其有 n 个广义坐标,广义坐标和速度的列向量为 q 和 v ,并设系统具有 m 个完整约束 $\phi(q) = 0$ 。Lagrange 函数可表示为 $L(q, v, t) = T - V$,这里 T 和 V 分别为系统的动能和势能。引入与约束速度有关的新的 Lagrange 函数

$$L^*(q, v, t) = L - \lambda^T \phi \quad (1)$$

式中: λ 表示 m 个 Lagrange 乘子矢量。设修正的动量 $p = \left(\frac{\partial L^*}{\partial v} \right)^T = (L_v^*)^T$,由原理可得正则形式的 Lagrange 方程

收稿日期:2003-06-28

基金项目:国家自然科学基金资助项目(10172011);教育部高校博士点科研基金资助项目

作者简介:金俐,副教授,主要从事非光滑多体系统动力学的研究。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{p} + \mathbf{D}^T) \\ \dot{\mathbf{p}} &= \mathbf{g} - \dot{\mathbf{D}}^T \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中: \mathbf{D} 为约束的 Jacobi 矩阵, $\mathbf{G} = \partial T / \partial \mathbf{q} + \mathbf{Q}$, 其中 \mathbf{Q} 为系统的广义力。数值计算时, 据 Baumgarte 提出的一种求正则方程数值解的方法^[3], 用 Baumgarte 稳定化方程 $\ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}} = 0$ 代替约束方程, 即

$$\mathbf{D}\mathbf{v} + \dot{\mathbf{D}}^T \mathbf{v} = 0 \quad (3)$$

将式(2)和(3)写成矩阵形式

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{D}^T \\ \mathbf{D} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{g} \end{bmatrix} \\ \dot{\mathbf{p}} &= \mathbf{G} - \dot{\mathbf{D}}^T \mathbf{v} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

方程(4)为非碰撞过程的动力学方程。

1.2 碰撞阶段的动量平衡冲量方程

设碰撞发生时间为 $[t^{(-)}, t^{(+)}]$, 由于此时间间隔足够小, 所以 $\mathbf{q}^{(-)} \cong \mathbf{q}^{(+)}$, 对方程(2)的第 2 式积分, 得

$$\mathbf{p} = \int_{t^{(-)}}^{t^{(+)}} (\mathbf{G} - \dot{\mathbf{D}}^T) dt \quad (5)$$

定义系统的冲量矢量 $\mathbf{p} = \int_{t^{(-)}}^{t^{(+)}} \mathbf{G} dt = \mathbf{p}^T$, 式中

定义为系统的复合法向矢量, 即当系统中第 i, j 两物体碰撞时, $\mathbf{p} = [\dots, 0, \dots, p_i, \dots, p_j, \dots, 0, \dots]^T$, p_i, p_j 分别表示与物体 i, j 的碰撞点所对应的法向矢量; \mathbf{p} 表示碰撞力冲量。将系统的冲量矢量代入式(5), 得

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}^T - \int_{t^{(-)}}^{t^{(+)}} \dot{\mathbf{D}}^T dt \mathbf{v} = \mathbf{p}^T \quad (6)$$

以系统的复合法向矢量表示的恢复系数

$$e = - \frac{\mathbf{v}^{(+)} \cdot \mathbf{p}}{\mathbf{v}^{(-)} \cdot \mathbf{p}} \quad (7)$$

将碰撞前后的速度矢量代入方程(7), 可得

$$\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{p} + \mathbf{D}^T \mathbf{v}^{(+)} - \mathbf{p} - \mathbf{D}^T \mathbf{v}^{(-)}) = -e \mathbf{p} \quad (8)$$

式中: $\mathbf{p} = \mathbf{p}^{(+)} - \mathbf{p}^{(-)}$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(+)} - \mathbf{v}^{(-)}$, 并且碰撞前后速度必须满足约束的速度方程 $\mathbf{D}\mathbf{v}^{(+)} = 0$ 和 $\mathbf{D}\mathbf{v}^{(-)} = 0$, 故有

$$\mathbf{D}\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{p} + \mathbf{D}^T \mathbf{v}) = 0 \quad (9)$$

联立方程(8)和(9), 得到具有约束的多体系统碰撞阶段的动量平衡冲量方程

$$(\mathbf{D}^* \mathbf{M}^{-1} \mathbf{D}^{*T}) \mathbf{u} = \mathbf{w} \quad (10)$$

式中: $\mathbf{D}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$, $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix}$

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ - (e+1) \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{p}^{(-)} + \mathbf{D}^T \mathbf{v}^{(-)}) \end{bmatrix}$$

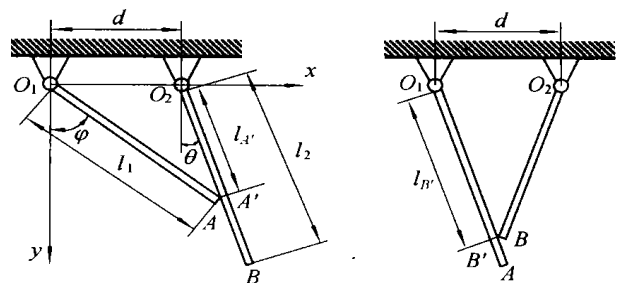
其中 $\mathbf{v}^{(-)}$ 和 $\mathbf{p}^{(-)}$ 可由非碰撞过程的动力学方程(4)求出。

2 非定点碰撞的多体系统碰撞问题

多体系统碰撞问题的动力学分析, 从对正则形式动力学方程(2)的积分开始, 直到系统的流线与约束面接触时刻, 可采用正则形式的动力学方程。从流线与约束面接触直到碰撞阶段结束, 正则形式的动力学方程不再适用。此阶段, 可利用动量平衡冲量方程(10), 由已知的恢复系统和碰撞前时刻的 $\mathbf{v}^{(-)}$, $\mathbf{p}^{(-)}$, $\mathbf{p}^{(-)}$, 可求得碰撞过程中的碰撞力冲量, 再由式(6)求得碰撞后分离时刻的修正动量 $\mathbf{p}^{(+)}$, 用这个新的动量, 恢复对正则形式的动力学方程(2)的积分。

笔者以 2 单摆组成的多体系统为例, 给出一种当多体系统在运动过程中碰撞点不确定, 且有多种可能碰撞点的情况下, 自动搜索碰撞点位置的方法。

如图 1 所示, 设 2 个质量分别为 m_1 和 m_2 , 长分别为 l_1 和 l_2 的均质刚性杆 O_1A 和 O_2B 与固定面用铰链联接。 O_1 与 O_2 间距离为 d , O_1A 杆和 O_2B 杆与铅垂线夹角分别为 φ 和 θ 。由 O_1A 杆和 O_2B 杆组成的多体系统在运动过程中发生碰撞时, 碰撞点位置不是固定不变的。可能有以下情况: O_1A 杆的 A 端与 O_2B 杆上的某一点碰撞(图 1(a)), O_2B 杆的 B 端与 O_1A 杆上的某一点碰撞(图 1(b)); 即若



(a) O_1A 杆 A 端与 O_2B 杆某一点碰撞
(b) O_2B 杆 B 端与 O_1A 杆某一点碰撞

图 1 2 单摆多体系统碰撞位置示意图

Fig. 1 The collision position of 2 single pendulums multibody systems

$$1) l_A = \sqrt{d^2 + l_1^2 - 2dl_1 \sin \theta} \quad l_2;$$

2) y_A 与 y_A' 有相同的正负号;

3) $A_n > A_n'$, A_n 和 A_n' 分别表示杆 O_1A 和 O_2B 上碰撞点 A 的法向速度;

4) 当 t 时刻 $x_A < x_A$, 而 $t + \Delta t$ 时刻 $x_A > x_A$ 且满足 $|x_A - x_A| < 10^{-6}$ 。

则杆 O_1A 的 A 端与杆 O_2B 上距 O_2 为 l_A 的点碰撞。否则, 若

$$1) l_B = \sqrt{d^2 + l_2^2 - 2dl_2\sin\theta} \quad l_1;$$

2) y_B 与 y_B 有相同的正负号;

3) $|v_{Bn}| > v_{Bn}$, v_{Bn} 和 v_{Bn} 分别表示杆 O_1A 上碰撞点 B 和杆 O_2B 的法向速度;

4) t 时刻 $x_B < x_B$, 而 $t + \Delta t$ 时刻 $x_B > x_B$ 且满足 $|x_B - x_B| < 10^{-6}$ 。

则 O_2B 杆的 B 端与 O_1A 杆上距 O_1 为 l_B 的点碰撞。若以上 2 种情况都不成立, 则 O_1A 杆与 O_2B 杆不发生碰撞。

利用上面的判式, 通过数值计算可自动寻找运动过程中系统碰撞点的位置。

下面的算例给出了 2 个单摆组成的多体系统在碰撞过程中碰撞点位置自动搜索的数值结果。系统如图 1 所示, 杆长分别为 $l_1 = 1 \text{ m}$, $l_2 = 1.1 \text{ m}$; 质量 $m_1 = m_2 = 3 \text{ kg}$; O_1 与 O_2 间距 $d = 0.5 \text{ m}$; 系统初始位置 $\theta = -\pi/2$, $\dot{\theta} = 0$, 由静止开始运动。自动搜索得到的系统碰撞点位置见表 1。

表 1 系统碰撞点位置的自动搜索结果

Fig. 1 The automatic searching result of collision points

θ / rad	$\dot{\theta} / \text{rad}$	l_A / l_2	l_B / l_1
0.523 599	0	0.866 025	
-0.154 702	-0.620 480		0.905 777
0.760 495	0.255 545	0.748 812	
-0.127 795	-0.595 501		0.918 142
0.438 562	-0.083 049	0.908 494	
0.560 328	0.037 127	0.847 665	
-0.130 239	-0.597 784		0.917 009
0.729 870	-0.220 151	0.763 693	
-0.102 776	-0.571 947		0.929 840

注: l_A 为与 O_1A 杆 A 端碰撞的 O_2B 杆上碰撞点 A 相对于 O_2 的距离, l_B 为与 O_2B 杆 B 端碰撞的 O_1A 杆上碰撞点 B 相对于 O_1 的距离。

3 结束语

本文中提出的动量平衡冲量方程, 适用于求解具有非光滑碰撞的多体系统动力学问题。同时, 给出一种当多体系统在运动过程中碰撞点不确定, 且有多个可能碰撞点的情况下, 碰撞点位置的自动搜索方法。

参 考 文 献

- [1] Lankarani H M, Nikravesh P E. Canonical impulse-momentum equation for impact analysis of multibody systems [J]. Transaction of the ASME, 1992, 114(3): 180 ~ 186
- [2] Lankarani H M, Nikravesh P E. Application of the canonical equation of motion in problem of constrained multibody systems with intermittent motion [J]. ASME Advance in Design Automation, 1988, 14: 417 ~ 423
- [3] Baumarte J W. A new method for stabilization of holonomic constraint [J]. ASME J Appl Mech, 1983, 50(12): 869 ~ 870
- [4] Wehage R A, Hang E J. Dynamic analysis of mechanical systems with intermittent motions [J]. ASME J of Mechanical Design, 1982, 104(4): 778 ~ 785
- [5] 刘才山, 陈滨. 多柔体系统碰撞动力学研究综述 [J]. 力学进展, 2000, 30(1): 8 ~ 14