

# 基于 MATLAB 的空间 7R 机构位置分析的新方法

周建成<sup>1</sup> 魏文军<sup>1</sup> 靳桂萍<sup>2</sup>

(1. 中国农业大学 工学院,北京 100083; 2. 北京航空航天大学 工程训练中心,北京 100083)

**摘要** 利用向量回转法和 MATLAB 软件对空间 7R 机构位置问题进行了分析研究,确定了各杆长和副长方向的单位向量,列出了机构的向量封闭方程,以及各杆位置方程;调用 MATLAB 矩阵运算函数和解非线性方程组函数,解出了其他各杆的位置与主动件输入角度的关系,以及任何一杆上任意点的空间轨迹,并利用绘图函数表达各杆的位置曲线及任意点的轨迹。实例分析证明所提出的方法是可靠的。

**关键词** 7R 机构; 向量回转法; MATLAB; 位置分析

**中图分类号** TH 112.1; TP 312

**文章编号** 1007-4333(2003)04-0030-03

**文献标识码** A

## A new method of the position analysis of the spatial 7R mechanism based on MATLAB

Zhou Jiancheng<sup>1</sup>, Wei Wenjun<sup>1</sup>, Jin Gui ping<sup>2</sup>

(1. College of Engineering, China Agricultural University, Beijing 100083, China;

2. Engineering Training Center, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

**Abstract** The method of rotation vector and software of MATLAB were used to analyze the displacement of the spatial 7R mechanism and confirm every pole and connection direction unit vector. The vectors' closed equations of the mechanism as well as every displace equations were developed and found the relation between other poles' position and the initiative input angle by transferring the function of the matrix operation and nonlinear equation of MATLAB, then figured out the spatial track of any point of any pole. Drawing functions were used to express the displacement curve and any point track. The example showed that the given method is reliable.

**Key words** the 7R mechanism; the method of rotation vector; MATLAB; the displacement analysis

空间 7R 机构的位移代数求解,在空间机构学上占有特殊重要的地位。空间机构位置的求解是从 20 世纪 60 年代对最简单的空间四杆机构 RCCC 的代数求解开始的。1980 年, Duffy 和 Crane 曾对 7R 机构作过分析,但当时认为 7R 机构的输入输出方程为 32 次,这样还没有得到正确结果。1985 年, Duffy 重新研究并得出 7R 机构的输入输出方程为 16 次。1986 年,我国机构学学者梁崇高和张启先用不同的方法解了一般 7R 机构的问题,他们的学生李宏友运用新向量法把 14 个方程经 2 次消元,建立起一般 7R 机构输入输出的 16 次方程,最后求解方程。笔者从分析齿轮啮合原理的方法中联想到可以运用向量回转法解决此类问题。由于此类高次方程难以求解,故笔者利用 MATLAB 程序编制,并对非

线性方程求解,从而对 7R 机构位置问题进行详细的分析研究。首次提出了一种用 MATLAB 解决 7R 空间机构的新方法,这种方法对空间四杆、五杆、六杆机构都是适用的,平面机构是一种特殊情况。相对于其他方法而言,该方法具有易于求解,可视性强等优点。

### 1 空间 7R 机构的分析模型

图 1 为空间 7R 机构的分析模型。图 1 中沿杆长方向的单位向量分别为  $e_1, e_2, \dots, e_7$ , 沿副长方向的单位向量分别为  $e_a, e_b, \dots, e_g$ 。

7R 机构的结构参数:杆长分别为  $l_1, l_2, \dots, l_7$ , 转动副的副长分别为  $s_a, s_b, \dots, s_g$ ; 相应构件的扭角为  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_7$ ; 运动变量  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_7$  为相应运动

收稿日期:2002-11-19

作者简介:周建成,硕士研究生;魏文军,教授,主要研究方向为智能机械设计

副的相对转角,其中  $\theta_1$  为主动件的输入角,  $\theta_7$  为从动件的输出角,  $\theta_2, \theta_3, \dots, \theta_6$  为中间运动变量。杆 1 为主动件,杆 7 为机架。

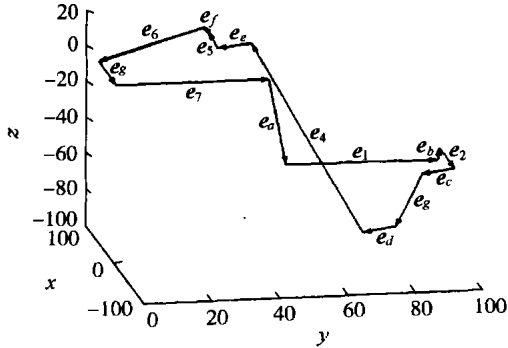


图 1 7R 机构分析模型

Fig.1 Analysis model of the 7R mechanism

## 2 用向量回转法确定各杆长和副长方向的单位向量

1) 从总体来说,单位向量  $e$  的方向沿封闭图逆时针方向顺序选取。

2) 取机架 7 为参考系,  $O$  为坐标系  $O-ijk$  的原点,并取  $i = e_g = [1, 0, 0]^T, j = e_7 = [0, 1, 0]^T, k = e_g \times e_7 = [0, 0, 1]^T$ 。各单位向量的求解如下:

$$\begin{aligned} e_a &= R(e_7, \theta_7) e_g & e_1 &= R(e_a, \theta_1) e_7 & e_b &= R(e_1, \theta_2) e_a \\ e_2 &= R(e_b, \theta_3) e_1 & e_c &= R(e_2, \theta_4) e_b & e_3 &= R(e_c, \theta_5) e_2 \\ e_d &= R(e_3, \theta_6) e_c & e_4 &= R(e_d, \theta_7) e_3 & e_e &= R(e_4, \theta_8) e_d \\ e_5 &= R(e_e, \theta_9) e_4 & e_f &= R(e_5, \theta_{10}) e_e & e_6 &= R(e_f, \theta_{11}) e_5 \end{aligned}$$

利用反转法求单位向量  $e_d, e_e, e_f$  如下:

$$\begin{aligned} e_6 &= R(e_g, \theta_7) e_7 & e_f &= R(e_6, -\theta_6) e_g & e_5 &= R(e_f, -\theta_5) e_6 \\ e_e &= R(e_5, -\theta_4) e_f & e_d &= R(e_e, -\theta_3) e_5 & e_c &= R(e_d, -\theta_2) e_e \end{aligned}$$

其中:  $R[e, \theta] = \begin{bmatrix} \cos \theta & -e_z \sin \theta & e_y \sin \theta \\ e_x \sin \theta & \cos \theta & -e_z \sin \theta \\ -e_y \sin \theta & e_x \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$  为旋转矩阵,  $e_x, e_y, e_z$  表示单位向量  $e$  的 3 个坐标分量。

## 3 MATLAB 编程解非线性方程组

对于

$$\begin{cases} l_i e_i + s_a e_a + s_b e_b + s_c e_c + s_d e_d + \\ s_e e_e + s_f e_f + s_g e_g = 0 \\ e_c \cdot e_d = \cos \theta_3 \\ e_d \cdot e_e = \cos \theta_4 \\ e_e \cdot e_f = \cos \theta_5 \end{cases}$$

当给定  $\theta_1$  为  $0 \sim 360^\circ$  时,可求 6 个未知数  $\theta_2, \theta_3, \dots, \theta_7$ 。

编一个函数  $F1 = fn1(e, \theta_1)$ ,求解旋转矩阵  $R[e, \theta]$ 。

针对 7R 机构编一个非线性方程组函数  $F2 = fn2(x)$ ,此函数多次调用  $F1 = fn1(e, \theta_1)$  函数,若改写该函数即可进行对其他空间机构及平面机构的分析。

求解非线性方程组函数  $x_n = fsolve(@fn2, x0, foptions)$ ,调用函数  $F2 = fn2(x)$  和旋转矩阵函数  $F1 = fn1(e, \theta_1)$ ,即可分析 7R 机构(程序略)。

在给定  $\theta_2, \theta_3, \dots, \theta_7$  的初值后,可通过迭代法求解非线性方程组,解出  $\theta_1$  为  $0 \sim 360^\circ$  时,  $\theta_2, \theta_3, \dots, \theta_7$  各对应的值,进而求解各杆上任一点的空间轨迹。

## 4 实例

已知条件为:  $l_1 = 45, l_2 = 15, l_3 = 100, l_4 = -115, l_5 = 10, l_6 = 35, l_7 = 35; s_a = 70, s_b = 10, s_c = 10, s_d = 10, s_e = 10, s_f = 10, s_g = -60; \theta_1 = 80^\circ, \theta_2 = -95^\circ, \theta_3 = 0, \theta_4 = 0, \theta_5 = -75^\circ, \theta_6 = 80^\circ, \theta_7 = 150^\circ; e_g = [1, 0, 0]^T, e_7 = [0, 1, 0]^T$ 。

实际中,只需要求解输入输出之间的函数关系,所以,这里重点解出  $\theta_7 = f(\theta_1)$ 。  $\theta_1$  为  $0 \sim 360^\circ$  时,  $\theta_7$  的变化情况见图 2。

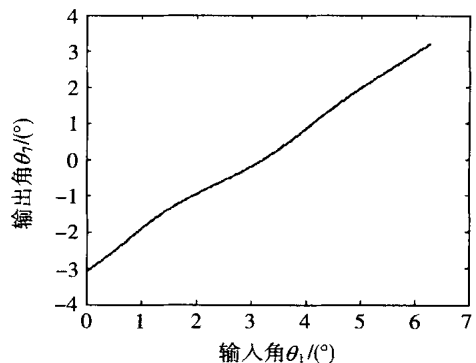


图 2  $\theta_1$  与  $\theta_7$  之间的关系

Fig.2 The relationship between  $\theta_1$  and  $\theta_7$

由程序可以解出杆 1 绕转动副 A 转动时,从  $0 \sim 360^\circ$  每隔  $15^\circ$  转动的各个时刻,各杆在空间的不同位置(图 3)。

## 5 求解各个杆上任意点的位置和轨迹

由于杆 7 是与基架相固连的,杆 6 和杆 1 上的

点的轨迹都是圆,所以只分析其余 4 杆上点的轨迹。

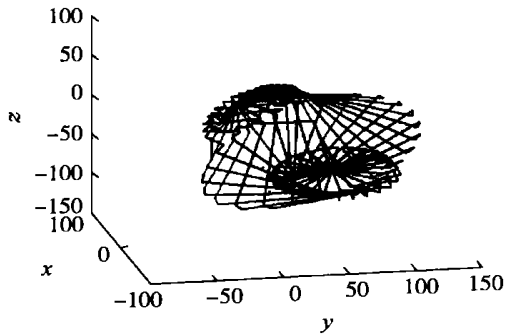


图 3 不同时刻各杆的位置图

Fig. 3 The position figure of every pole at any time

做空间运动的各杆上任意点的轨迹方程如下:

$$r_2 = l_7 e_7 + s_a e_a + l_1 e_1 + u_2 e_b + v_2 e_2 + w_2 (e_b \times e_2)$$

$$r_3 = l_7 e_7 + s_a e_a + l_1 e_1 + s_b e_b + l_2 e_2 + u_3 e_c + v_3 e_3 + w_3 (e_c \times e_3)$$

$$r_4 = l_7 e_7 + s_a e_a + l_1 e_1 + s_b e_b + l_2 e_2 + s_c e_c + l_3 e_3 + u_4 e_d + v_4 e_4 + w_4 (e_d \times e_4)$$

$$r_5 = l_7 e_7 + s_a e_a + l_1 e_1 + s_b e_b + l_2 e_2 + s_c e_c + l_3 e_3 + s_d e_d + l_4 e_4 + u_5 e_e + v_5 e_5 + w_5 (e_e \times e_5)$$

其中  $u_i, v_i, w_i (i = 2, 3, 4, 5)$  表示杆上点的位置,其空间轨迹见图 4。

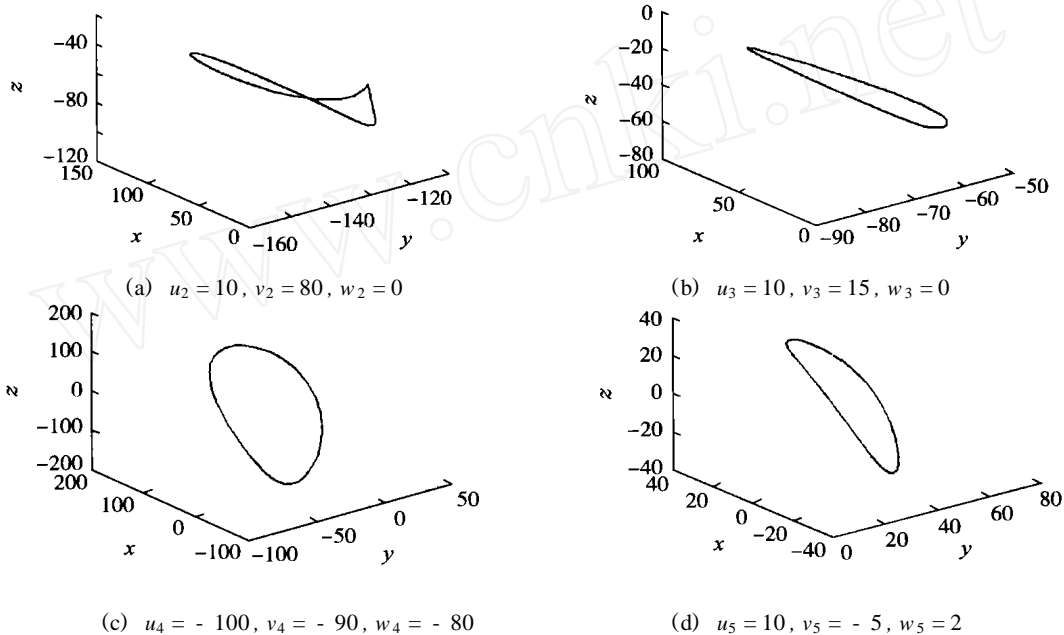


图 4 杆上点的位置和空间轨迹

Fig. 4 The position and spatial track of point of any pole

## 6 结 论

根据所建立的 7R 机构位置分析的数学模型,运用 MATLAB 数学工具和向量回转法对空间 7R 机构进行位置分析,得到了不同时刻各杆的位置函数及其杆上任一点的空间轨迹,解决了高次方程难于求解的问题。这种方法不但适合于 7R 机构,对其他空间四、五、六杆机构和平面机构都是适用的。从而为机构分析提供了一种新型的实用方法,为机器人和机构学问题的求解提供了可视化功能,为机

构的运动分析、受力分析、三维动画、运动仿真等提供了研究平台。

## 参 考 文 献

- [1] 祝毓琥,刘行远. 空间连杆机构的分析和综合[M]. 北京:高等教育出版社,1986. 97p
- [2] 黄 真. 空间机构学[M]. 北京:机械工业出版社,1989. 292p
- [3] 苏金明,阮沈勇. MATLAB6.1 使用指南[M]. 北京:电子工业出版社,2002. 673p