中国农业大学学报　2002, 7(2): 57～61
Journal of China Agricultural University

计算诱导短程挠率的一种新方法

赵亚平①　段晓静　魏文军
(中国农业大学机械工程学院)　(中国农业大学水利与土木工程学院)　(中国农业大学机械工程学院)

摘　要　为了分析线接触共轭齿面的诱导短程挠率, 并清楚地诠释有关公式及计算推导的过程, 运用微分几何、向量代数、线性代数等数学工具, 寻找了一种计算诱导短程挠率的方法。推导过程中利用齿面主曲率、主方向可以使计算过程简化, 得出的公式形式简明。

关键词　短程挠率; 诱导短程挠率; 齿轮啮合理论

中图分类号　TH 132.4

A New Method for Calculating Induced Geodesic-torsion

Zhao Yaping[1], Duan Xiaojing[2], Wei Wenjun[1]
(1. College of Machinery Engineering, China Agricultural University, Beijing 100083, China;
2. College of Water Conservancy and Civil Engineering, China Agricultural University, Beijing 100083, China)

Abstract　A calculating method for finding the induced geodesic-torsion was developed by using differential geometry and other mathematics tools. During the development, the concepts of principal curvature and principal direction were used by which the calculation could be simplified.

Key words　geodesic-torsion; induced geodesic-torsion; theory of gears-engaging

在齿轮啮合理论中, 计算诱导主曲率具有重要意义, 然而诱导主曲率的计算离不开对共轭曲面诱导短程挠率的分析。文献中现有的诱导短程挠率的计算公式多是由诱导法曲率公式求导得出的[1, 2], 但由于问题的复杂性, 公式中各量与 γ 角(欲求诱导短程挠率方向与两齿面公切面上任意固定方向的夹角)的关系不易说明, 因而求导过程说不清楚, 不易为读者接受。寻求一种不必求导的诱导短程挠率计算法, 具有现实意义。

1　诱导短程挠率计算公式的推导

根据微分几何[2]

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{n}}{\mathrm{d}s} = -k_n\boldsymbol{\alpha} - \tau_g(\mathbf{n}\times\boldsymbol{\alpha}) \tag{1}$$

其中: n 为曲面在某点的单位法矢量; α 为曲面在同一点的单位切矢量; s 为曲面上以 α 为切方向的法截线的弧长参数; k_n 为曲面沿 α 方向的法曲率; τ_g 为曲面沿 α 方向的短程挠率; 式(1)两边点乘(α×n), 解出 τ_g 得到

$$\tau_g = (\boldsymbol{\alpha}\times\mathbf{n})\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{n}}{\mathrm{d}s} \tag{2}$$

收稿日期: 2001-12-03

①赵亚平, 北京清华东路 17 号 中国农业大学(东校区) 52 信箱, 100083

建立坐标系 σ_1 和 σ_2 分别与齿轮 1 和 2 相固连, 对于两共轭齿面 Σ_1 和 Σ_2 式(2) 写作

$$\tau_{1g} = (\alpha \times n) \cdot \frac{d_1 n}{ds_1}$$

$$\tau_{2g} = (\alpha \times n) \cdot \frac{d_2 n}{ds_2}$$

其中: τ_{ig} 为共轭曲面沿 α 方向的短程挠率, $i = 1, 2$; $\frac{d_i n}{ds_i}$ 为共轭曲面单位公法矢量在第 i 个坐标系中对相应弧长参数的导数。

设齿面 Σ_1 的方程在坐标系 σ_1 中为

$$r_1 = r_1(u, \theta)$$

其中: r_1 为坐标系 σ_1 的原点到齿面 Σ_1 上任意一点的矢径; u, θ 为齿面 Σ_1 的齿面参数。

取齿轮 1 的角速度矢量的模 $|\omega_1| = 1\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$, 转角 $\varphi = t$, t 为时间, $d\varphi = dt$, 根据相对微分的法则

$$d_2 n = dn - \omega_2 \times n d\varphi = d_1 n + \omega_1 \times n d\varphi - \omega_2 \times n d\varphi = d_1 n + \omega_{12} \times n d\varphi$$

所以

$$\frac{d_2 n}{ds_2} = \frac{d_1 n}{ds_2} + \omega_{12} \times n \frac{d\varphi}{ds_2} = n_u \frac{du}{ds_2} + n_\theta \frac{d\theta}{ds_2} + \omega_{12} \times n \frac{d\varphi}{ds_2}$$

其中: ω_2 为齿轮 2 的角速度矢量, $\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$; ω_{12} 为齿轮 1, 2 的相对角速度矢量, $\omega_{12} = \omega_1 - \omega_2$; $n_u = \frac{dn}{du}$; $n_\theta = \frac{dn}{d\theta}$。根据诱导短程挠率的定义有

$$\tau_{12g} = \tau_{1g} - \tau_{2g} = (\alpha \times n) \cdot \left(\frac{d_1 n}{ds_1} - \frac{d_2 n}{ds_2} \right) = (\alpha \times n) \cdot \left(n_u \frac{du}{ds_1} + n_\theta \frac{d\theta}{ds_1} - n_u \frac{du}{ds_2} - n_\theta \frac{d\theta}{ds_2} - \omega_{12} \times n \frac{d\varphi}{ds_2} \right) = (\alpha \times n) \cdot \left[n_u \left(\frac{du}{ds_1} - \frac{du}{ds_2} \right) + n_\theta \left(\frac{d\theta}{ds_1} - \frac{d\theta}{ds_2} \right) \right] - (\alpha \cdot \omega_{12}) \frac{d\varphi}{ds_2} \tag{3}$$

作为齿面 Σ_1 的单位切矢量

$$\alpha = \frac{d_1 r_1}{ds_1} = r_{1u} \frac{du}{ds_1} + r_{1\theta} \frac{d\theta}{ds_1} \tag{4}$$

其中: $r_{1u} = \frac{dr_1}{du}$, $r_{1\theta} = \frac{dr_1}{d\theta}$。式(4) 两边分别点乘 r_{1u}, $r_{1\theta}$, 得到联立方程组

$$\left. \begin{aligned} E \frac{du}{ds_1} + F \frac{d\theta}{ds_1} &= r_{1u} \cdot \alpha \\ F \frac{du}{ds_1} + G \frac{d\theta}{ds_1} &= r_{1\theta} \cdot \alpha \end{aligned} \right\} \tag{5}$$

其中: E, F, G 为齿面 Σ_1 的第一类基本量[3], $E = r_{1u} \cdot r_{1u}$, $F = r_{1u} \cdot r_{1\theta}$, $G = r_{1\theta} \cdot r_{1\theta}$。由式(5) 得到关于 $\frac{du}{ds_1}$, $\frac{d\theta}{ds_1}$ 的二元一次方程组, 此方程组的系数行列式为 $\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} = EG - F^2 = D^2$。对于齿面 Σ_1 的正常点, $D^2 = (r_u \times r_\theta)^2 > 0$, 这时可以解出

$$\frac{du}{ds_1} = \frac{1}{D^2} (G r_{1u} - F r_{1\theta}) \cdot \alpha \tag{6}$$

$$\frac{d\theta}{ds_1} = -\frac{1}{D^2} (F r_{1u} - E r_{1\theta}) \cdot \alpha \tag{7}$$

由相对微导关系

$$\frac{\mathrm{d}_2\mathbf{r}_2}{\mathrm{d}s_2}=\frac{\mathrm{d}_1\mathbf{r}_1}{\mathrm{d}s_2}+\mathbf{v}_{12}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s_2}$$

其中: $\mathbf{v}_{12}$**为两齿面在接触点的相对速度。而且**

$$\frac{\mathrm{d}_2\mathbf{r}_2}{\mathrm{d}s_2}=\frac{\mathrm{d}_1\mathbf{r}_1}{\mathrm{d}s_1}=\boldsymbol{\alpha}$$

所以

$$\mathbf{r}_{1u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s_2}+\mathbf{r}_{1\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s_2}+\mathbf{v}_{12}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s_2}=\boldsymbol{\alpha} \tag{8}$$

式(8)**两端分别点乘** $\mathbf{r}_{1u}$, $\mathbf{r}_{1\theta}$**得到**

$$E\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s_2}+F\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s_2}+\mathbf{r}_{1u}\cdot\mathbf{v}_{12}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s_2}=\mathbf{r}_{1u}\cdot\boldsymbol{\alpha} \tag{9}$$

$$F\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s_2}+G\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s_2}+\mathbf{r}_{1\theta}\cdot\mathbf{v}_{12}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s_2}=\mathbf{r}_{1\theta}\cdot\boldsymbol{\alpha} \tag{10}$$

考虑啮合函数 $\Phi(u,\theta,\varphi)=\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}_{12}=0$ **的全微分**, $\mathrm{d}\Phi=0$, **即**

$$\Phi_u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s_2}+\Phi_\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s_2}+\Phi_\varphi\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s_2}=0 \tag{11}$$

联立式(9), (10), (11), **得到关于**$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s_2}$, $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s_2}$**和**$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s_2}$**的线性方程组, 其系数行列式为**

$$\begin{vmatrix} E & F & \mathbf{r}_{1u}\cdot\mathbf{v}_{12} \\ F & G & \mathbf{r}_{1\theta}\cdot\mathbf{v}_{12} \\ \Phi_u & \Phi_\theta & \Phi_\varphi \end{vmatrix}=D^2\psi \tag{12}$$

其中: ψ**为齿面偶**$[\Sigma_1,\Sigma_2]$**的一界函数**, $\psi=\mathbf{N}\cdot\mathbf{v}_{12}+\Phi_\varphi$, **式中**

$$\mathbf{N}=\frac{1}{D^2}\begin{vmatrix} \mathbf{r}_{1u} & \mathbf{r}_{1\theta} & 0 \\ E & F & \Phi_u \\ F & G & \Phi_\theta \end{vmatrix}$$

对于齿面上的啮合点, 如果不是二类界点, 也不是一界共轭点, 即$\psi\neq0$, **那么式**(12)**中的三阶行列式不为** 0, **则由三元一次方程组**(9), (10), (11)**可以解得**

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s_2}=\frac{1}{D^2\psi}\left[(G\Phi_\varphi-\Phi_\theta\mathbf{r}_{1\theta}\cdot\mathbf{v}_{12})\mathbf{r}_{1u}-(F\Phi_\varphi-\Phi_\theta\mathbf{r}_{1u}\cdot\mathbf{v}_{12})\mathbf{r}_{1\theta}\right]\cdot\boldsymbol{\alpha} \tag{13}$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s_2}=-\frac{1}{D^2\psi}\left[(F\Phi_\varphi-\Phi_u\mathbf{r}_{1\theta}\cdot\mathbf{v}_{12})\mathbf{r}_{1u}-(E\Phi_\varphi-\Phi_u\mathbf{r}_{1u}\cdot\mathbf{v}_{12})\mathbf{r}_{1\theta}\right]\cdot\boldsymbol{\alpha} \tag{14}$$

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s_2}=\frac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{N}}{\psi} \tag{15}$$

由式(6), (7), (13)**和**(14)**得**

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s_1}-\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s_2}=\frac{1}{D^2\psi}\boldsymbol{\alpha}\cdot\{[G(\mathbf{N}\cdot\mathbf{v}_{12})+\Phi_\theta(\mathbf{r}_{1\theta}\cdot\mathbf{v}_{12})]\mathbf{r}_{1u}-[F(\mathbf{N}\cdot\mathbf{v}_{12})+\Phi_\theta(\mathbf{r}_{1u}\cdot\mathbf{v}_{12})]\mathbf{r}_{1\theta}\} \tag{16}$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s_1}-\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s_2}=\frac{1}{D^2\psi}\boldsymbol{\alpha}\cdot\{[E(\mathbf{N}\cdot\mathbf{v}_{12})+\Phi_u(\mathbf{r}_{1u}\cdot\mathbf{v}_{12})]\mathbf{r}_{1\theta}-[F(\mathbf{N}\cdot\mathbf{v}_{12})+\Phi_u(\mathbf{r}_{1\theta}\cdot\mathbf{v}_{12})]\mathbf{r}_{1u}\} \tag{17}$$

记$A_u=(\boldsymbol{\alpha}\times\mathbf{n})\cdot\mathbf{n}_u$, $A_\theta=(\boldsymbol{\alpha}\times\mathbf{n})\cdot\mathbf{n}_\theta$, **同时将式**(15), (16)**和**(17)**代入式**(3), **得到诱导短程挠率的计算式**

$$\tau_{12g}=\frac{1}{D^{2}\psi}\boldsymbol{\alpha}\cdot\{[(GA_u-FA_\theta)(\mathbf{N}\cdot\mathbf{v}_{12})+(\Phi_\theta A_u-\Phi_u A_\theta)(\mathbf{r}_{1\theta}\cdot\mathbf{v}_{12})]\mathbf{r}_{1u}+$$

$$[(EA_\theta-FA_u)(\mathbf{N}\cdot\mathbf{v}_{12})+(\Phi_u A_\theta-\Phi_\theta A_u)(\mathbf{r}_{1u}\cdot\mathbf{v}_{12})]\mathbf{r}_{1\theta}\}-\frac{1}{\psi}(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\omega}_{12})(\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{N}) \tag{18}$$

令

$$\mathbf{M}=\begin{vmatrix}\mathbf{r}_{1u} & \mathbf{r}_{1\theta} & 0\\ FA_u-EA_\theta & GA_u-FA_\theta & \Phi_u A_\theta-\Phi_\theta A_u\\ \mathbf{r}_{1u}\cdot\mathbf{v}_{12} & \mathbf{r}_{1\theta}\cdot\mathbf{v}_{12} & \mathbf{N}\cdot\mathbf{v}_{12}\end{vmatrix} \tag{19}$$

则式(18)可以写成

$$\tau_{12g}=\frac{1}{\psi}\left[\frac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{M}}{D^{2}}-(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\omega}_{12})(\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{N})\right] \tag{20}$$

式(20)即为两线接触共轭曲面在公切面上任意公切方向诱导短程挠率的计算式。由推导过程可知,式(20)是齿面线接触情况下计算共轭曲面诱导短程挠率的普遍公式。

2 利用曲率线网化简诱导短程挠率计算式

齿面 Σ_1 上取曲率线网, $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$ 为 2 个主方向的单位矢量, 则

$$\boldsymbol{\alpha}=\cos\gamma\,\mathbf{g}_1+\sin\gamma\,\mathbf{g}_2 \tag{21}$$

其中: γ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 与第一主方向 $\mathbf{g}_1$ 的夹角。于是有

$$F=0 \tag{22}$$

$$D^{2}=EG \tag{23}$$

$$\mathbf{n}=\mathbf{g}_1\times\mathbf{g}_2 \tag{24}$$

$$\mathbf{r}_{1u}=\sqrt{E}\,\mathbf{g}_1 \tag{25}$$

$$\mathbf{r}_{1\theta}=\sqrt{G}\,\mathbf{g}_2 \tag{26}$$

$$\mathbf{n}_u=-k_1\sqrt{E}\,\mathbf{g}_1 \tag{27}$$

$$\mathbf{n}_\theta=-k_2\sqrt{G}\,\mathbf{g}_2 \tag{28}$$

其中 k_1 和 k_2 为齿面 Σ_1 的 2 个主曲率。所以

$$A_u=(\boldsymbol{\alpha}\times\mathbf{n})\cdot\mathbf{n}_u=-k_1\sqrt{E}\sin\gamma \tag{29}$$

$$A_\theta=(\boldsymbol{\alpha}\times\mathbf{n})\cdot\mathbf{n}_\theta=k_2\sqrt{G}\cos\gamma \tag{30}$$

将式(21), (25), (26)代入式(6)和(7)得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s_1}=\frac{1}{D^{2}}\boldsymbol{\alpha}\cdot(G\mathbf{r}_{1u}-F\mathbf{r}_{1\theta})=\frac{\cos\gamma}{\sqrt{E}} \tag{31}$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s_1}=-\frac{1}{D^{2}}\boldsymbol{\alpha}\cdot(F\mathbf{r}_{1u}-E\mathbf{r}_{1\theta})=\frac{\sin\gamma}{\sqrt{G}} \tag{32}$$

而且

$$\mathbf{r}_{1u}\cdot\mathbf{v}_{12}=\sqrt{E}\,(\mathbf{v}_{12}\cdot\mathbf{g}_1) \tag{33}$$

$$\mathbf{r}_{1\theta}\cdot\mathbf{v}_{12}=\sqrt{G}\,(\mathbf{v}_{12}\cdot\mathbf{g}_2) \tag{34}$$

此时

$$N = \lambda g_1 + \mu g_2 \tag{35}$$

其中:

$$\lambda = k_1 (v_{12} \cdot g_1) + \omega_{12} \cdot g_2 \tag{36}$$

$$\mu = k_2 (v_{12} \cdot g_2) - \omega_{12} \cdot g_1 \tag{37}$$

所以

$$N \cdot v_{12} = \lambda (v_{12} \cdot g_1) + \mu (v_{13} \cdot g_2) \tag{38}$$

$$\Phi_u = - r_{1u} \cdot N = - \lambda \sqrt{E} \tag{39}$$

$$\Phi_\theta = - r_{1\theta} \cdot N = - \mu \sqrt{G} \tag{40}$$

将(21)～(40)诸式代入式(19), 经整理化简, 得

$$M = D^2 (v_{12} \cdot (k_2 \cos \gamma g_2 - k_1 \sin \gamma g_1))]N \tag{41}$$

将式(41)及 α 的表达式(22)代入式(20), 并利用 λ 和 μ 的表达式(36)和(37)化简得

$$\tau_{12g} = \frac{\alpha \cdot N}{\psi} [v_{12} \cdot (k_2 \cos \gamma g_2 - k_1 \sin \gamma g_1) - \alpha \cdot \omega_{12}] = \frac{\alpha \cdot N}{\psi} (\mu \cos \gamma - \lambda \sin \gamma) \tag{42}$$

利用向量点积, 式(42)可以写成

$$\tau_{12g} = \frac{\alpha \cdot N}{\psi} (\cos \gamma g_1 + \sin \gamma g_2) \cdot (\mu g_1 - \lambda g_2) = - \frac{\alpha \cdot N}{\psi} \alpha \cdot (\lambda g_2 - \mu g_1) =$$

$$- \frac{\alpha \cdot N}{\psi} \alpha \cdot \{\lambda [(g_1 \cdot g_1) g_2 - (g_2 \cdot g_1) g_1] + \mu [(g_1 \cdot g_2) g_2 - (g_2 \cdot g_2) g_1]\} \tag{43}$$

逆用向量二重叉积公式[4], 并注意到式(24)和(35)的关系, 式(43)可以写为

$$\tau_{12g} = - \frac{\alpha \cdot N}{\psi} \alpha \cdot [\lambda (g_1 \times g_2) \times g_1 + \mu (g_1 \times g_2) \times g_2] = \frac{\alpha \cdot N}{\psi} \alpha \cdot [(\lambda g_1 + \mu g_2) \times n]$$

即

$$\tau_{12g} = \frac{1}{\psi} (\alpha \cdot N) (\alpha, N, n) \tag{44}$$

式(44)与式(20)、(42)没有本质的差别, 只是数学形式对称、优美, 且与诱导法曲率计算公式相似, 便于记忆。在实际计算时, 若能够方便地求得齿面 Σ_1 的主曲率和主方向, 再应用式(42)编制程序, 计算线接触诱导短程挠率将会比较简便。

3　结束语

运用微分几何、向量代数、线性代数等数学工具, 推导的诱导短程挠率计算公式为

$$\tau_{12g} = \frac{1}{\psi} (\alpha \cdot N) (\alpha, N, n) = \frac{1}{\psi} \left[\frac{\alpha \cdot M}{D^2} - (\alpha \cdot \omega_{12}) (\alpha \cdot N) \right] = \frac{\alpha \cdot N}{\psi} (\mu \cos \gamma - \lambda \sin \gamma)$$

推导过程中不仅没有对诱导法曲率求导, 而且无需首先知道诱导法曲率, 因而思路清晰, 易于接受。齿轮副有关参数给定之后, 只要按此公式编程计算, 就能求出线接触共轭齿面任意公切方向的诱导短程挠率, 利用主曲率、主方向可以使计算过程简化。

参　考　文　献

1　董学朱. 齿轮啮合理论基础. 北京: 机械工业出版社, 1989. 56～57

2　吴大任, 骆家舜. 齿轮啮合理论. 北京: 科学出版社, 1985. 114～115, 314～315

3　梅向明, 黄敬之. 微分几何. 北京: 高等教育出版社, 1988. 101～102

4　苏步青, 胡和生, 沈纯理, 等. 微分几何. 北京: 高等教育出版社, 1994. 225～226