

球颗粒间幂律流体挤压流动法向黏性力的高效数值算法

黄文彬 徐 泳

(中国农业大学工程基础科学部)

摘 要 为在填隙幂律流体的湿颗粒系统离散元模拟中迅速精确地求出法向黏性力, 根据笔者导出的刚性球颗粒间幂律流体挤压流动的积分形式的法向黏性力表达式, 利用因子分解和级数展开发展了一套拟合算法以取代数值积分。拟合结果与数值积分结果比较表明, 该方法计算量小且精度很高。

关键词 离散元法; 幂律流体; 挤压流动; 黏性力; 拟合

中图分类号 O 347. 7; O 373

A High Efficiency Algorithm of Squeeze Force in Squeeze Flow With Power-law Fluid Between Spheres

Huang Wenbin, Xu Yong

(College of Applied Engineering Sciences, China Agricultural University, Beijing 100083, China)

Abstract In order to evaluate the normal viscous force between two rigid spheres in squeeze flow of a power-law fluid efficiently so as to implement into simulation using the Distinct Element Method, a fitting scheme with a factorization technique and series expansion was developed instead of numerical integration based on the integration form of formulation for the force in our accompanied paper. Comparing with the accurate results by a numerical integration, the approximate results by the proposed scheme, an excellent agreement was shown but the proposed scheme can greatly reduce the CPU time.

Key words the discrete element method; power-law fluid; squeeze flow; viscous force; fitting

用离散元法 (DEM) 模拟浸渍态或液桥型高密度湿颗粒群力学行为是散体力学的一个新的研究方向。当流体为非牛顿体时颗粒间相互作用的模型变得相当复杂, 为了建立填隙幂律流体湿颗粒群的离散元法模型, 笔者在已有研究^[1]的基础上根据润滑理论导出了任意两球体间幂律流体挤压流动的法向黏性力公式^[2], 并证明比 Rodin^[3]的渐近解更精确合理。但是这个公式包含有无法显式积出的积分表达式, 这对于离散元法模拟极为不利。通常离散元法模拟的颗粒数以万计, 在每一时步需对所有接触的颗粒算出黏性力并确定当前颗粒所受的合力, 进而确定其运动, 其计算工作量之大远非有限元可比, 在工作站上较复杂的颗粒群模拟往往需数周甚至数月时间。对湿颗粒系统而言, 即使用很快的数值积分 (如高斯积分) 计算, 耗费的机时也十

收稿日期: 2002-01-08

国家自然科学基金资助项目 (19972075)

黄文彬, 北京清华东路 17 号 中国农业大学 (东校区) 75 信箱, 100083

分可观。所以,对离散元法模拟,必须寻求更快更准确的近似解法来取代数值积分。本文中集中研究这一问题

1 法向黏性力公式

任意两球体间幂律流体挤压流动的法向黏性力公式^[1]为

$$F_n = 2\pi K \left[\frac{2n+1}{n} \right]^n V_z^n \frac{B^{n+3}}{s_0} f(n, c) \quad (1)$$

其中

$$f(n, c) = \int_0^c \frac{t^{n+2} dt}{(1+ct^2)^{2n+1}} \quad (2)$$

式中: K 为常系数, n 为幂指数, s_0 为最小间隙, V_z 为半径 R_1 和 R_2 的两球体沿连心轴移动的相对速度。参数 c 为积分上限, 量纲 1, 反映流体外边界半径 B 、最小间隙 s_0 和等效半径 R 的特性, 定义为

$$c = B^2 / (R s_0) \quad (3)$$

而等效半径 R 定义为

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{2R_1} + \frac{1}{2R_2} \quad (4)$$

注意此处的等效半径是许多文献定义的谐调平均半径的 2 倍, $R = 2R^*$ 。对浸渍情形, 由分析可知可取 $B = R$; 这时 $c = R/s_0$, 又称间隙比。在密相固体挤压流动中, B 和 R 数量级相同, 但通常 $s_0 \ll R$; 故对有意义的黏性力值, $c \gg 1$ 。

于是法向黏性力计算归结为对函数 $f(n, c)$ 的求值。下面提出一种较精确的拟合方法。

2 数值拟合方法

为简化求值, 假定积分函数可写成变量分离形式

$$f(n, c) = \prod_k A_k(n) f_k(c)$$

式中: $A_k(n)$ 和 $f_k(c)$ 分别为 n 和 c 的待定函数。本文中采用一种因子分解技巧来合理地捕捉函数 $f_k(c)$ 形式。

2.1 在 $n=0$ 附近展开的近似公式形式

注意到当 $n=0$ 时, 积分函数 $f(n, c)$ 可以显式积出:

$$f(0, c) = \int_0^c \frac{t^2 dt}{1+ct^2} = \frac{1}{c} (1 - c^{-1/2} \arctan c^{1/2}) \quad (5)$$

由式(5)出发, 可以获得一组适当的因子来描述 $f(n, c)$ 的特征。函数 $\arctan c^{1/2}$ 在 $n=0$ 附近可展开为级数 $\arctan c^{1/2} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{c^{1/2}} + \frac{1}{3c^{3/2}} - \frac{1}{5c^{5/2}} + \dots$, 其中 $|c| > 1$, 把 $c^{-5/2}$ 以后的高阶项略去, 并代入式(5), $f(n, c)$ 可近似成

$$f(0, c) = \frac{1}{c} - \frac{\pi}{2} \frac{1}{c^{1.5}} + \frac{1}{c^2} - \frac{1}{3c^3} + \frac{1}{5c^4} \quad (6)$$

于是积分函数 $f(n, c)$ 在 $n=0$ 附近可表示成 5 项代数式的组合, 简记为 A 5。

$$f(n, c) = \frac{A_1(n)}{c} + \frac{A_2(n)}{c^{1.5}} + \frac{A_3(n)}{c^2} + \frac{A_4(n)}{c^3} + \frac{A_5(n)}{c^4} \quad (7)$$

为简化计算略去末项而表示成 4 项代数式的组合, 简记为 A_4 。

$$f(n, c) = \frac{A_1(n)}{c} + \frac{A_2(n)}{c^{1.5}} + \frac{A_3(n)}{c^2} + \frac{A_4(n)}{c^3} \quad (8)$$

在式(7)和(8)中, $A_1(n), A_2(n), \dots, A_4(n)$ 和 $A_5(n)$ 是 n 的待定函数, 依赖于 $c^{-1}, c^{-1.5}, c^{-2}, c^{-3}$ 和 c^{-4} 。因幂指数 n 是流体的物理常数, 可以事先固定为一组已知值 \bar{n}_i ($i = 1, 2, \dots, N$), 故函数 $A_1(\bar{n}_i), A_2(\bar{n}_i), \dots, A_4(\bar{n}_i)$ 和 $A_5(\bar{n}_i)$ 可视为 $c^{-1}, c^{-1.5}, c^{-2}, c^{-3}$ 和 c^{-4} 的待定系数。采用适当的数值拟合方法可将函数 $f(\bar{n}_i, c)$ 分解, 对于一组 \bar{n}_i 值, 可以求出拟合系数 $A_1(\bar{n}_i), A_2(\bar{n}_i), \dots, A_4(\bar{n}_i)$ 和 $A_5(\bar{n}_i)$ 。

2.2 在 $n=1$ 附近展开的近似公式形式

当 n 接近于 1 时也可利用 $n=1$ 时的展开结果, 这时函数 $f(n, c)$ 可显式积出为

$$f(1, c) = \int_0^1 \frac{t^3 dt}{(1+ct^2)^3} = \frac{1}{4(1+c)^2} \quad (9)$$

考虑把右端项分解为一些子因式的和。设 $n = 1 + \epsilon, \epsilon \ll 1$, 代入式(9)得

$$f(n, c) \Big|_{n=1+\epsilon} = \int_0^1 \frac{t^{3+\epsilon} dt}{(1+ct^2)^{3+2\epsilon}} \quad (10)$$

将 $t^{3+\epsilon}$ 对 ϵ 展开, 得

$$t^{3+\epsilon} = t^3 t^\epsilon = t^3 \left[1 + \ln t \cdot \epsilon + \frac{(\ln t)^2}{2!} \epsilon^2 + \frac{(\ln t)^3}{3!} \epsilon^3 + \dots \right]$$

只保留主要项即 $t^{3+\epsilon} \approx t^3(1 + \epsilon \ln t)$, 代入式(10), 经过适当的参数变换可积分得

$$f(n, c) \Big|_{n=1+\epsilon} = \frac{1}{2c^2} \left\{ \frac{-1}{1+2\epsilon} \left[\frac{1}{(1+c)^{1+2\epsilon}} - 1 \right] + \frac{1}{2+2\epsilon} \left[\frac{1}{(1+c)^{2+2\epsilon}} - 1 \right] \right\} \quad (11)$$

式(11)是由 $\frac{1}{c^2}, \frac{1}{c^2(1+c)^{2n-1}}$ 和 $\frac{1}{c^2(1+c)^{2n}}$ 项组成, 故在 $n=1$ 附近函数 $f(n, c)$ 可表示成 3 项代数式的组合, 简记为 B_3

$$f(n, c) = \frac{B_1(n)}{c^2} + \frac{B_2(n)}{c^2(1+c)^{2n-1}} + \frac{B_3(n)}{c^2(1+c)^{2n}} \quad (12)$$

当 $\epsilon = 0$ 时, 则 $n=1$, 由式(11)得

$$f(1, c) = \frac{0.25}{c^2} - \frac{0.5}{c^2(1+c)} + \frac{0.25}{c^2(1+c)^2} \quad (13)$$

3 拟合算法

基于 $n=0$ 附近的表达式(7), 待定的拟合系数 $A_1(\bar{n}_i), A_2(\bar{n}_i), \dots, A_5(\bar{n}_i)$ 可由对一组 \bar{n}_i 进行广义拟合得到。具体求解步骤如下。

- 1) 选择 1 组实际可能采用的幂指数值作为固定的参数 \bar{n}_i , 如可取 $\bar{n}_i = 0, 0.1, 0.2, \dots, 1.5$;
- 2) 选择 1 组实用范围内给定的 c 值作为插值点之值 c_j , 构造一向量 X

$$X = [c_1 \ c_2 \ c_3 \ \dots \ c_j \ \dots \ c_M]^T \quad (j = 1, 2, \dots, M)$$

- 3) 对每个给定的 \bar{n}_i 值, 求解步骤如下:

a. 利用数值积分方法求 $f(\bar{n}_i, c_j)$ ($j = 1, 2, \dots, M$) 的值, 所得的 M 个积分结果构成向量

$Y(\bar{c})$;

b. 定义含 c 因子的向量

$$F(c) = [c^{-1} \quad c^{-1.5} \quad c^{-2} \quad c^{-3} \quad c^{-4}]^T$$

c. 利用数学工具软件可求出拟合系数向量

$$A(\bar{n}_i) = [A_1 \quad A_2 \quad A_3 \quad A_4 \quad A_5]^T$$

其中 A_1, A_2, \dots, A_5 即为对应 \bar{n}_i 的拟合系数 $A_1(\bar{n}_i), A_2(\bar{n}_i), \dots, A_5(\bar{n}_i)$ 。

4) 对每个给定的 \bar{n}_i 值, 可得相应的积分函数 $f(n, c)$ 值, $f(\bar{n}_i, c) = A(\bar{n}_i) \cdot F(c)$ 。

用完全相同的步骤可以求出 $n=0$ 时相应于式(8)的拟合系数 $A_1(\bar{n}_i), A_2(\bar{n}_i), \dots, A_4(\bar{n}_i)$, 或 $n=1$ 附近相应于式(12)的拟合系数 $B_1(\bar{n}_i), B_2(\bar{n}_i)$ 和 $B_3(\bar{n}_i)$ 。

4 拟合算法的验证

为检查拟合算法的正确性, 选择了2组20个 \bar{c}_j 值, 最大值均为 $\bar{c}_M = 400$, 第1组为非均匀分布

$$X_1 = [2 \quad 5 \quad 10 \quad 15 \quad 20 \quad 30 \quad \dots \quad 320 \quad 360 \quad 400]^T \quad (14a)$$

第2组为均匀分布

$$X_2 = [20 \quad 40 \quad 60 \quad 80 \quad 100 \quad 120 \quad \dots \quad 360 \quad 380 \quad 400]^T \quad (14b)$$

对 X_1 和 X_2 这2个向量选取2组给定的 \bar{n}_i , 在检查 $n=0$ 附近时, 对于式(7) (A_5 形式) 和式(8) (A_4 形式), 选取 $\bar{n}_i = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0, 1.2$ 和 1.5 ; 而在检查 $n=1$ 附近时, 对式(12) (B_3 形式), 取 $\bar{n}_i = 0.6, 0.8, 1.0, 1.2$ 和 1.5 。借助于数学软件可得到 A_5, A_4 和 B_3 这3种形式对于 X_1 和 X_2 的所有拟合系数。图1示出了相应于 A_5 对 X_1 的拟合系数。

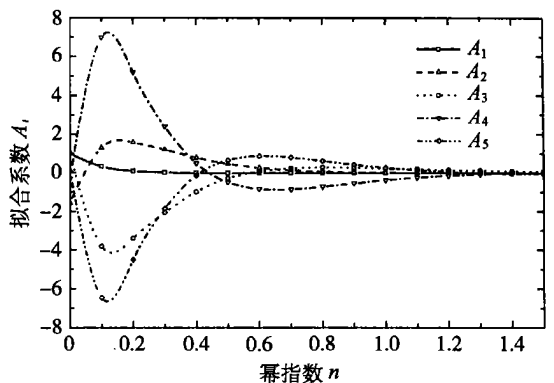


图1 A_5 形式对 X_1 的拟合系数

采用 A_5 形式 ($n=0$ 附近) 对非均匀分布的 X_1 拟合, 当 $n=0$ 时所得拟合系数为 $A_1 = 1.0$, $A_2 = -1.569$, $A_3 = 0.993$, $A_4 = -0.303$, $A_5 =$

0.105 ; 而采用式(6)的计算值为 $A_1 = 1$, $A_2 = -1.57$, $A_3 = 1$, $A_4 = -0.333$, $A_5 = 0.20$ 。

采用 B_3 形式 ($n=1$ 附近) 对 X_1 拟合, 当 $n=1$ 时可得拟合系数

$$B_0 = 0.25, B_1 = -0.5, B_2 = 0.25$$

与采用式(13)的精确值吻合。可见拟合效果相当好。

采用 A_4 和 A_5 对 X_1 进行拟合, 拟合值与精确解比较见图2。由图2可见对非均匀分布 X_1 , A_4 形式不足以给出好的拟合结果, 特别是在 $\bar{n}_i > 0.4$ (用实散点表示) 和 $c > 150$ 以后。注意到 $f(n, c)$ 值须乘以积分项外的参量, 因此会造成显著误差, 而 A_5 拟合就要好得多。 c 的分布方式对拟合质量的影响见图3, 可见均匀分布 X_2 (式(14b)) 显然比非均匀 c 分布 X_1 (式(14a)) 吻合得更好。原因是, 非均匀 c 分布 X_1 中给定值 \bar{c}_j 在低端分布太密集, 而在高端较稀疏, 说明在需要较精确计算处应提供较多的插值点。

在 $n = 1$ 附近 $B3$ 对 X_1 和 X_2 , 以及 $A5$ 对 X_2 的拟合结果见图 4。由图可见除均匀分布 X_2 优于非均匀分布 X_1 外, 令人意外的是, 在 $n = 0$ 附近展开的 $A5$ 形式的拟合结果比 $n = 1$ 附近的 $B3$ 形式的拟合还要好, 故只用式 (7) 进行拟合即可。

笔者还试验了其他方式的拟合, 如其他幂次的多项式组合, 但都没有上述因子分解的效果好。

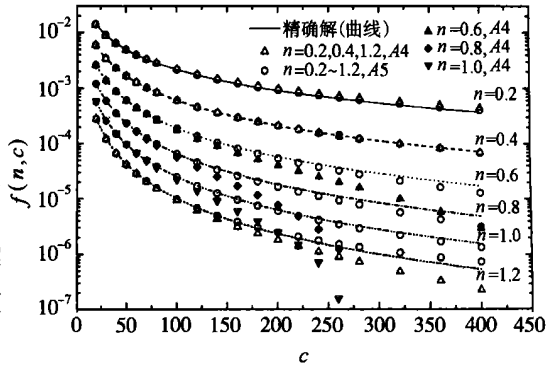


图 2 A 4 形式和 A 5 形式对 X_1 的拟合结果比较

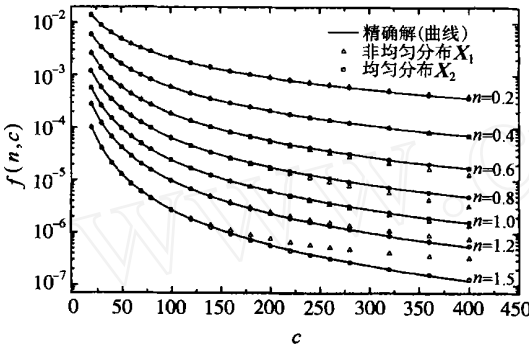


图 3 均匀分布 X_2 和非均匀分布 X_1 的 A 5 形式对 X_1 和 X_2 的拟合结果比较

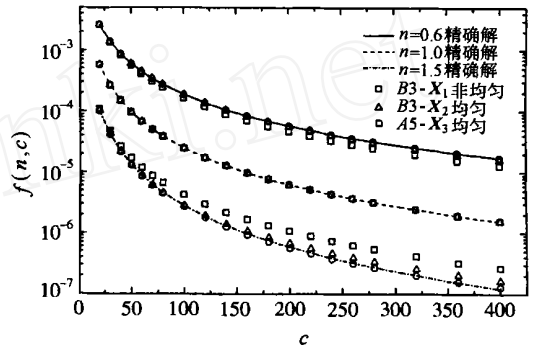


图 4 A 5 和 B 3 的展开拟合结果比较

5 结 论

为了在湿颗粒系统的离散元模拟中快速准确地求出法向黏性力, 本文中提出的因子分解技巧重点解决积分函数的求值问题, 由于因子分解技巧很好地捕捉了积分函数的特征, 拟合效果非常精确。尽管 $A5$ 列式是在 $n = 0$ 附近展开推导的, 但仍然可应用于任何幂指数的幂律流体, 并达到很高的精度。这对湿颗粒群的离散元模拟是非常重要的步骤。

本研究得到联合利华(英国)练国平博士和联合利华(中国)联络总监曾锡文先生的关心支持与帮助, 谨致谢意。

参 考 文 献

- 1 Adam s M J, Edmondson B. Forces between particles in continuous and discrete liquid media In B riscoe B J, Adam s M J. Tribology in Particulate Technology, 1987, 154~ 172
- 2 徐 泳, 黄文彬, 李红艳 圆球颗粒间有幂律流体时挤压流动的法向粘性力 农业工程学报, 2002, 18(2): 1 ~ 4
- 3 Rodin G J. Squeeze Film between two spheres in a power-law fluid J Non-Newtonian Fluid Mechanics, 1996, 63: 141~ 152