

有壁面滑移时刚性球颗粒间流体的挤压流动

黄文彬 徐 泳

Guoping Lian

(中国农业大学工程基础科学部) (联合利华研究机构 Colworth 实验室)

摘 要 挤压流动中流体在壁面的滑移发生在某些非牛顿流体或存在润滑层的牛顿流体情形, 此现象对黏性力的影响值得研究。基于润滑理论, 导出了壁面滑移时刚性球间牛顿流体挤压流动的压力分布和黏性力的解析解。通过引进滑移修正系数, 解析解可分解成无滑移解和滑移修正系数的乘积。该系数是滑移参数和量纲 1 积分上限的复杂函数, 但数值试验表明, 对充分大的量纲 1 积分上限和给定的滑移参数, 该系数趋于常数, 由此可大大简化黏性力的计算, 从而明显减小湿散体离散元模拟的计算量。

关键词 挤压流动; 滑移; 牛顿流体; 润滑理论; 离散元法

中图分类号 O 347. 7; O 373

On the Squeeze Flow of Newtonian Fluid Between Two Rigid Spheres With Wall Slip

Huang Wenbin Xu Yong

Guoping Lian

(College of Applied Engineering Sciences, CAU) (Unilever Research Colworth Laboratory)

Abstract In a squeeze flow wall slip may happen at a solid-fluid interface in the case of some Non-Newtonian fluid, or a Newtonian fluid with a thin lubricant film between the fluid and the wall. Based on Reynolds' lubrication theory, an analytical solution for two rigid spheres was derived, including pressure distribution and resulting viscous force. By introducing a so called "slip correction coefficient", this force can be represented by a product of the relevant non-slip solution and the coefficient. In general this coefficient is a function of the slip parameter and the dimensionless integration limit, however, further numerical test shows that, for a sufficient large value of the dimensionless upper limit of integration and a given slip parameter, the coefficient converges to a limit value, suggesting a simplification in calculation of the viscous force to save the CPU time significantly in simulation for a wet granule system using the Distinct Element Method.

Key words squeeze flow; slip; Newtonian fluid; lubrication theory; Distinct Element Method

对两平行圆盘或圆球间存在的牛顿或非牛顿流体的挤压流动分析是不少工程应用的理论基础, 如流变测量仪器的研制、轴承润滑分析等, 其中对圆球间挤压流动分析的一个重要用途是建立密相湿散体系统模型进行离散元 (DEM) 模拟。自 Stephan^[1]1874 年研究平行圆盘间牛

收稿日期: 2000-09-19

国家自然科学基金资助项目

黄文彬, 北京清华东路 17 号 中国农业大学 (东校区) 75 信箱, 100083

顿流体的挤压流动以来,有一些研究两平行圆盘或球体间无滑移挤压流动的文章^[2~4]发表,但涉及界面滑移问题的仅发现Laun等^[5]对两行圆盘间挤压流动的研究,尚未见界面滑移时两球体间流体挤压流动的文献。

大多数情况下特别是对牛顿流体,固-流界面上无滑移发生。根据流体壁面滑移实验研究的有关报道^[6~8],滑移现象可发生在如下情况:1)固体-流体间存在薄润滑膜;2)多相复杂流体如高浓度悬浮体在流动时壁面附近浓度常常减小,导致滑移发生(如挤牙膏);3)高分子聚合物熔体在抽丝或注模等过程中,界面处高分子链在受剪切作用时黏附点下移造成非零速度。本文假定界面上存在壁面滑移,适用于存在润滑层的牛顿流体或虽是幂律流体但幂指数接近于1时的近似分析。目的是研究在挤压流动中滑移对球形颗粒力学行为的影响,以便建立相关的湿颗粒系统离散元模型进行相应的数值模拟。

1 刚性球颗粒间部分滑移时的压力和挤压黏性力

1.1 基本方程和边界条件

图1为圆球间的挤压流动示意图,采用 $r-z$ 柱坐标系。半径为 R_1 和 R_2 的两刚性球体沿连心轴线以相对速度 V_z 缓慢趋近, B 是从接触中心到流体在径向参考边界的宽度, s_0 是最小间隙。在润滑理论适用的情况下,由接近的球面 S_1 和 S_2 确定的几何边界可近似为

$$\left. \begin{aligned} S_1 \quad z = z_1(r) = s_0 + r^2/(2R_1) \\ S_2 \quad z = z_2(r) = -r^2/(2R_2) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

不可压缩流体的连续方程

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

式中: v_r 为径向速度分量, v_z 为垂向速度分量。

挤压流动下常忽略法向应力,并假定压力 p 与 z 无关,于是动量方程简化为

$$\frac{dp}{dr} = \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} \quad (3)$$

式中 τ_{rz} 是剪应力分量,它和速度分量 v_r 间的关系为

$$\tau_{rz} = \eta \frac{\partial v_r}{\partial z} \quad (4)$$

其中 η 为动力黏度。

本文中采用与文献[5]中平行圆盘问题类似的摩擦滑移条件,即流体滑移速度表述为 $v_r = \beta |\tau_{rz}|$,速度边界条件为

$$\left. \begin{aligned} \text{在 } z = z_1 \text{ 上 } \quad v_r = -\beta \tau_{rz} = -\beta \eta \frac{\partial v_r}{\partial z}, \quad v_z = -V_z \\ \text{在 } z = z_2 \text{ 上 } \quad v_r = \beta \tau_{rz} = \beta \eta \frac{\partial v_r}{\partial z}, \quad v_z = 0 \end{aligned} \right\} \quad (0 \leq r \leq B) \quad (5)$$

式中 β 为比例常数,称为滑移系数。严格地讲,球表面精确的滑移边界应表示为切向速度间断值与切向剪应力分量的关系,但是可以证明,在接触中心区域切向和径向几乎重合,故由此引

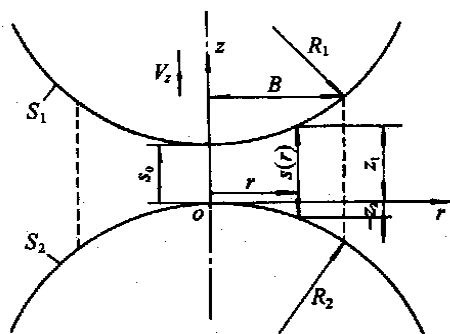


图1 圆球间的挤压流动

起的误差可以忽略。

1.2 压力分布

对动量方程式(3)积分 2 次并与式(4)相联系可得

$$v_r = \frac{1}{2\eta\alpha} z^2 + C_1(r) \frac{1}{\eta} z + C_2(r) \quad (6)$$

式中 $C_1(r)$ 和 $C_2(r)$ 待定。对连续方程式(2)积分, 引入边界条件并将式(6)代入得

$$\frac{1}{6\eta\alpha} (z_1^3 - z_2^3) + \frac{1}{2\eta} C_1(r) (z_1^2 - z_2^2) + C_2(r) (z_1 - z_2) = \frac{1}{2} v_z \quad (7)$$

由式(5)中的滑移条件得

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2\eta\alpha} z_1^2 + C_1(r) \frac{1}{\eta} z_1 + C_2(r) &= -\beta \left[\frac{\partial v_z}{\partial r} z_1 + C_1(r) \right] \\ \frac{1}{2\eta\alpha} z_2^2 + C_1(r) \frac{1}{\eta} z_2 + C_2(r) &= \beta \left[\frac{\partial v_z}{\partial r} z_2 + C_1(r) \right] \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

把几何边界关系式(1)代入, 并定义量纲 1 的滑移参数

$$\alpha = 2\beta\eta/s_0 \quad (9)$$

再从式(7)和(8)中消去 $C_1(r)$ 和 $C_2(r)$ 得 $\partial v_z / \partial r$ 的表达式, 积分此式可得压力分布

$$p(r) = \int_B^r \frac{\partial v_z}{\partial r} dr = -\frac{6v_z \eta}{s_0^3} f(r, \alpha) \quad (10)$$

其中

$$f(r, \alpha) = \int_B^r \frac{r dr}{[1 + c(r/B)^2]^2 \{ [1 + c(r/B)^2]^2 + 3\alpha \}} \quad (11)$$

式中 c 为积分上限, 量纲 1; 定义为

$$c = B^2 / (s_0 R) \quad (12)$$

这里 R 为等效半径, 定义为

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{2R_1} + \frac{1}{2R_2} \quad (13)$$

积分上限 c 与间隙大小、等效半径和液体径向参考边界有关, B 较小时相应于液桥, 反之相应于浸渍状态。若可取 $B = \min(R_1, R_2)$, $R = R_1$, 则 $c = R_1 / s_0$ 反映两球接近程度, 可称间隙比。

1.3 挤压黏性力

挤压黏性力是压力的积分

$$F_s = \int_0^{2\pi} \int_0^B p(r) r dr = -\frac{12\pi v_z \eta}{s_0^3} \int_0^B f(r, \alpha) dr$$

用分部积分, 并令 $t = r/B$, 可得壁面滑移时两球间牛顿流体挤压流动的黏性力

$$F_s = \frac{6\pi v_z \eta B^4}{s_0^3} f_1(\alpha, c) \quad (14)$$

式中

$$f_1(\alpha, c) = \int_0^1 \frac{t^3 dt}{(1 + ct^2)^2 (1 + 3\alpha + ct^2)} \quad (15)$$

定义滑移修正系数

$$f_s = f_1(\alpha, c) / f_1(0, c) \quad (16)$$

式中 $f_1(\alpha, c)$ 和 $f_1(0, c)$ 可以显式积出, 最终可得滑移修正系数

$$f_s(\alpha, c) = 2 \left\{ \frac{1+c}{c} \right\}^2 \left\{ \frac{1}{3\alpha} \left(1 + \frac{1}{3\alpha} \right) \ln \left[\frac{(1+3\alpha)(1+c)}{1+c+3\alpha} \right] - \frac{c}{3\alpha(1+c)} \right\} \quad (17)$$

Lian (练国平)^[4] 得到的无滑移两球间牛顿流体挤压流动的黏性力为

$$F_0 = 3\pi\eta V_z (R)^2 / (2s_0) \quad (18)$$

由式(14), 滑移挤压黏性力也可写作

$$F_s = f_s F_0 = f_s(\alpha, c) \frac{3\pi\eta V_z (R)^2}{2s_0} \quad (19)$$

这样, 壁面滑移时两球间牛顿流体黏性力的计算归结为对滑移修正系数 $f_s(\alpha, c)$ 的求值。

2 结果分析及公式简化

由一组 α 值得到的滑移修正系数 $f_s(\alpha, c)$ 随积分上限 c 的变化见图2。从总体上看, f_s 随着滑移参数 α 的增大而减小, 意味着黏性力随着润滑作用的加强而减小; 反之 α 减小时黏性力增大。有趣的是, 对确定的 α 值, 在 c 值的一定的中间区段内, f_s 随参数 c 的增大而显著增大, 而

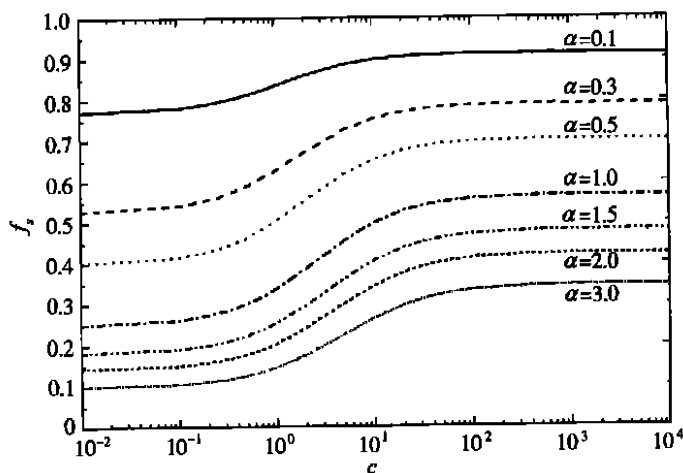


图2 积分上限 c 对滑移修正系数 f_s 的影响

在此前或以后 f_s 变化甚小, 在 $c = 10^3 \sim 10^4$ 时可看作常数。对离散元模拟而言, c 越小无滑移黏性力值也越小以致可忽略, 由此可不再考虑 c 的影响。取 $c \rightarrow \infty$, 则式(17)简化成

$$f_s = \frac{2}{3\alpha} \left[\left(1 + \frac{1}{3\alpha} \right) \ln(1+3\alpha) - 1 \right] \quad (20)$$

特别地, 当 $\alpha = 0$ 时, 由式(16)得 $f_s = 1$, 即无滑移, 黏性力公式由式(19)退回到式(18)。当 $c \rightarrow 0$ 时, $f_s = 1/(1+3\alpha)$, 可以证明这表示问题退回到平行圆盘的结果^[1]。

3 结论

本文中研究了任意刚性圆球间牛顿流体存在壁面滑移时的挤压流动, 得出压力分布和挤压黏性力的公式。通过引进的滑移修正系数, 滑移解分解为无滑移解和该系数的乘积。注意到当积分上限 c 充分大时, 滑移修正系数可近似为只是滑移参数的函数, 这时用简化公式计算可以减小离散元模拟的计算量。显然, 滑移解与材料的滑移特性密切相关, 为了确定滑移参数, 还需要必要的试验研究。本研究适用于存在润滑层的牛顿流体或幂律指数接近于1的幂律流体

的近似计算, 可用于对湿颗粒物料进行数值模拟。

本研究得到联合利华(Unilever, Plc)及联合利华(中国)有限公司曾锡文总监的关心和支持, 谨致谢意。

参 考 文 献

- 1 Bird R B, Armstrong R C, Hassager O. Dynamics of polymeric liquids. New York: Wiley, 1977, 19~ 21
- 2 Davis A M J, Frenkel A L. Cylindrical liquid bridges squeezed between parallel plates: exact Stokes flow solutions and hydrodynamic forces. *Phys Fluids A*. 1992, 4: 1105~ 1109
- 3 Adams M J, Edmondson B. Forces between particles in continuous and discrete liquid media. In: Briscoe B J, Adams M J (ed). *Tribology in Particulate Technology*. 1987, 154~ 172
- 4 廉国平. Computer simulation of moist agglomerate collisions: [Ph. D. thesis]. Birmingham: Aston University, 1994 U K
- 5 Laun H M, Rady M, Hassager O. Analytical solutions for squeeze flow with partial wall slip. *J Non-Newtonian Fluid Mechanics*. 1999, 81: 1~ 15
- 6 Atwood B T, Schowalter W R. Measurement of slip at the wall during the flow of high density polyethylene through a rectangular conduit. *Rheology Acta*. 1989, 28: 134~ 146
- 7 Ramamurthy A V. Wall slip in viscous fluids and influence of material construction. *J Rheology*, 1986, 30: 337~ 357
- 8 Cohen Y, Metzner A B. Apparent slip flow of polymer solutions. *J Rheology*, 1985, 29: 67~ 102