中国农业大学学报 2000, 5(6): 8～11
Journal of China Agricultural University

属性层次模型的决策方法与应用

甄 苓①　王来生
(中国农业大学工程基础科学部)

摘　要　在属性测度基础上, 提出了相对属性测度和属性判断矩阵, 并由属性判断矩阵构成相对权重和合成权重。最后用AHM 方法讨论一实际问题。

关键词　属性层次模型; 相对属性测度; 属性判断矩阵; 一致性
分类号　F 224.12

The Method of Decision Making and the Application of Attribute Hierarchical Model

Zhen Ling　Wang Laisheng
(College of Applied Engineering Sciences, CAU)

Abstract　Attribute hierarchical model is a new method of unstructured decision making. Based on the attribute measure, the concepts of related attribute measure and attribute judgment matrix are presented. Related weights and synthetic weights can be obtained from judgment matrix. By using the AHM method, a practical model was solved.

Key words　attribute hierarchical model; related attribute measure; attribate judgment matrix; weights

对于无结构决策问题, Saaty 在 70 年代提出了层次分析法(AHP)。该方法是一种定性与定量相结合的决策分析方法, 适用于因素结构复杂且缺乏必要数据的情况。利用AHP 方法处理问题时关键在于构造两两比较的判断矩阵且使所构造的判断矩阵符合一致性检验要求; 但是由于问题构成因素的复杂性, 往往对判断矩阵的一致性检验比较困难, 这样就给利用AHP 方法解决问题带来不便, 而属性层次模型(AHM), 这种新的无结构决策方法是在AHP 方法基础上提出的, 它可以较有效地解决无结构决策问题。

1　属性层次模型法的原理

设$m_1, m_2, \cdots, m_n$为 n 个元素, C 为一准则。对于准则C, 比较任何两个不同元素m_i 和m_j $(i \neq j)$, m_i 和m_j 对准则C 的相对重要性分别记为m_{ij}和m_{ji}。

定义 1[1]　如果m_{ij}和m_{ji}满足$m_{ij} > 0, m_{ji} > 0$ 且$m_{ij} + m_{ji} = 1 (i \neq j, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n)$, 则称$m_{ij}$和$m_{ji}$为相对属性测度; 由$m_{ij}$组成的 n 阶矩阵$M = (m_{ij})$称为属性判断矩阵, 其中规定$m_{ii} = 0$。

定义 2　若$m_{ij} > m_{ji}$, 则称元素m_i 比元素m_j 相对强, 记作$m_i > m_j$。

收稿日期: 2000-05-29
①甄　苓, 北京清华东路 17 号 中国农业大学(东校区) 71 信箱, 100083

定义3 如果属性判断矩阵$M=(m_{ij})$满足对任意$1\le i,j,k\le n(i\ne j\ne k)$,并且

1) 若有$m_{ij}>m_{kj}$,则$m_i>m_k$;

2) 若有$m_i>m_j$,$m_j>m_k$,则有$m_i>m_k$。

则称属性判断矩阵$M=(m_{ij})$具有一致性。

定理1 对于任何2个不同元素m_i和m_j,$m_i>m_j$的充要条件是$m_{ij}>0.5$。

证明

充分性。 由相对属性定义,若$m_{ij}>0.5$,则$m_{ji}=1-m_{ij}<0.5$,得$m_{ij}>m_{ji}$,因此$m_i>m_j$。

必要性。 设$m_i>m_j$,由定义2得$m_{ij}>m_{ji}$,而$m_{ij}+m_{ji}=1$,所以$m_{ij}>0.5$。

令

$$h(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

$$S_{ik}=\{j\mid m_{ij}>m_{kj},1\le j\le n\}\quad 1\le i,k\le n,\ i\ne j\ne k$$

$$f(x)=\begin{cases}1 & x>0.5\\ 0 & x\le 0.5\end{cases}$$

$$I_i=\{j\mid f(m_{ij})=1,1\le j\le n\}\quad 1\le i\le n,\ i\ne j$$

定理2 属性判断矩阵$M=(m_{ij})$具有一致性的充分必要条件是

1) 对任何i和k,当S_{ik}非空时

$$h(m_{ik}-m_{ki})-h\left(\sum_{j\in S_{ik}}h(m_{ij}-m_{kj})\right)\ge 0$$

2) 对任何i,当I_i非空时

$$f(m_{ik})-f\left(\sum_{j\in I_i}f(m_{jk})\right)\ge 0\quad 1\le k\le n$$

证明

必要性。 由$m_{ij}>m_{kj}$,可得$m_i>m_k$。则对任意i和k,当S_{ik}非空时有$h(m_{ik}-m_{ki})=1$,$h\left(\sum_{j\in S_{ik}}h(m_{ij}-m_{kj})\right)=1$;所以1)成立。

由$m_i>m_j$和$m_j>m_k$,可得$m_i>m_k$。则对于任何i,当I_i非空时有$f(m_{ik})=1$,$f\left(\sum_{j\in I_i}f(m_{jk})\right)=1$;所以2)成立。

充分性。 设1)成立。若$m_{ij}>m_{kj}$,则S_{ik}非空,且$h\left(\sum h(m_{ij}-m_{kj})\right)=1$,所以$h(m_{ik}-m_{ki})=1$,因此$m_{ik}-m_{ki}>0$,则得$m_i>m_k$。

设2)成立。若$m_i>m_j$,$m_j>m_k$,则I_i非空,且$f(m_{ij})=1$,$f(m_{jk})=1$,$f\left(\sum_{j\in I_i}f(m_{jk})\right)=1$,因此$f(m_{ik})=1$,得$m_i>m_k$。

令

$$w_c(i)=\frac{2}{n(n-1)}\sum_{j=1}^{n}m_{ij}\quad 1\le i\le n$$

定义4 称$W_c=(w_c(1),w_c(2),\cdots,w_c(n))^T$为相对属性权。

相对属性 m_{ij} 可以由比例标度 a_{ij} 确定。本文中规定 $m_{ij}=\begin{cases} k/(k+1) & a_{ij}=k \\ 1/(k+1) & a_{ij}=1/k \end{cases}$

2 属性层次模型方法的应用

利用属性层次模型进行决策的基本方法如下。

1) 建立递阶层结构。根据组成问题各元素的性质, 把它们分成 3 个不同层次。最高层只有 1 个元素, 为目标层, 一般是问题预定目标或理想结果; 中间层为准则层, 包含为实现目标所涉及的中间环节, 这些环节作为决策分析的准则; 最底层为决策的方案, 是为实现目标所采取的措施。上一层元素作为准则支配下一层元素。

2) 构造属性判断矩阵并计算相对属性权。以最高层为准则, 构造中间层各元素的属性判断矩阵, 并计算相对权重。以中间层为准则构造最低层各元素的属性判断矩阵, 并计算相对权重。对构造的属性判断矩阵要进行一致性检验。

3) 计算方案对目标的合成权重。

下面利用属性层次模型的决策方法解决一实际问题。

例[2] 一个具有平均收入的家庭考虑购买 1 栋房子, 他们确定了 8 个准则去衡量。这 8 个准则是: a. 房子大小; b. 交通便利程度; c. 环境状况; d. 房龄; e. 庭院面积; f. 现代化设施; g. 房子条件; h. 购买方式。

现有 3 处房子可供选择, 分别是房子 A, 房子 B, 房子 C。

首先将该问题所涉及的因素分层, 构造递阶层结构(图 1); 然后计算下层各元素对上层元素的相对属性, 构造属性判断矩阵并计算相对属性权; 最后计算合成权重。

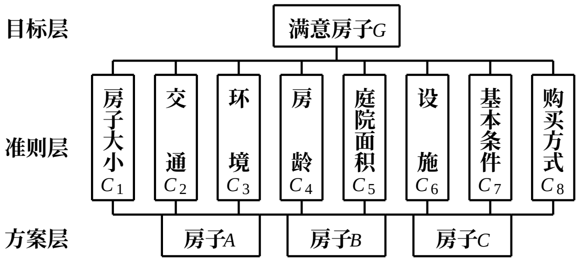

图1 递阶层结构模型

中间准则层对目标层的属性判断矩阵和相对属性权 W_G 如下。

G	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	W_G
C_1	0	0.83	0.75	0.88	0.86	0.86	0.25	0.20	0.17
C_2	0.17	0	0.25	0.83	0.75	0.75	0.17	0.12	0.11
C_3	0.25	0.75	0	0.86	0.75	0.80	0.86	0.17	0.16
C_4	0.12	0.17	0.14	0	0.25	0.20	0.12	0.11	0.04
C_5	0.14	0.25	0.25	0.75	0	0.33	0.17	0.14	0.06
C_6	0.14	0.25	0.20	0.80	0.67	0	0.17	0.14	0.08
C_7	0.75	0.83	0.14	0.88	0.83	0.83	0	0.33	0.17
C_8	0.80	0.88	0.83	0.89	0.86	0.86	0.67	0	0.21

下层方案层对中间准则层的属性判断矩阵和相对属性权如下。

C_1	A	B	C	W_{C_1}
A	0	0. 86	0. 89	0. 58
B	0. 14	0	0. 80	0. 31
C	0. 11	0. 20	0	0. 11

C_2	A	B	C	W_{C_2}
A	0	0. 88	0. 17	0. 35
B	0. 12	0	0. 11	0. 08
C	0. 83	0. 89	0	0. 57

C_3	A	B	C	W_{C_3}
A	0	0. 89	0. 86	0. 58
B	0. 11	0	0. 20	0. 11
C	0. 14	0. 80	0	0. 31

C_4	A	B	C	W_{C_4}
A	0	0. 50	0. 50	0. 33
B	0. 50	0	0. 50	0. 33
C	0. 50	0. 50	0	0. 33

C_5	A	B	C	W_{C_5}
A	0	0. 83	0. 80	0. 54
B	0. 17	0	0. 25	0. 14
C	0. 20	0. 75	0	0. 32

C_6	A	B	C	W_{C_6}
A	0	0. 89	0. 86	0. 58
B	0. 11	0	0. 17	0. 10
C	0. 14	0. 83	0	0. 32

C_7	A	B	C	W_{C_7}
A	0	0. 33	0. 33	0. 20
B	0. 67	0	0. 50	0. 40
C	0. 67	0. 50	0	0. 40

C_8	A	B	C	W_{C_8}
A	0	0. 12	0. 17	0. 10
B	0. 88	0	0. 75	0. 54
C	0. 83	0. 25	0	0. 36

经检验, 上述属性判断矩阵均具有一致性。由上述相对属性权构成合成相对属性权为

$$\overline{W}_G = (W_{C1}, W_{C2}, \cdots, W_{C8}) W_G = \begin{pmatrix} 0.58 & 0.35 & 0.58 & 0.33 & 0.54 & 0.58 & 0.20 & 0.10 \\ 0.31 & 0.08 & 0.11 & 0.33 & 0.14 & 0.10 & 0.40 & 0.54 \\ 0.11 & 0.57 & 0.31 & 0.33 & 0.32 & 0.32 & 0.40 & 0.36 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.17 \\ 0.11 \\ 0.16 \\ 0.04 \\ 0.06 \\ 0.08 \\ 0.17 \\ 0.21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.38 \\ 0.29 \\ 0.33 \end{pmatrix}$$

由此可见, 方案 A 的合成权重最大, 应选择房子 A 。这个结论与文献[1]中用 AHP 方法得出的结论是一致的。

3　结束语

AHM 是一种新的无结构决策方法, 这种方法具有简单、有效的特点, 但是有关 AHM 的一些理论问题还需进一步研究。

参　考　文　献

1　程乾生. 属性层次模型 AHM —— 一种新的无结构决策方法. 北京大学学报(自然科学版), 1998, 34(1): 10～13

2　范贻昌. 实用管理运筹学. 天津: 天津大学出版社, 1995. 338～345