

金属有限变形问题中应力应变的选择

徐春晖 黄文彬 王红卫 杨青春
(中国农业大学工程基础科学部) (北京机电研究所)

摘要 在假设弹性系数为常数的前提下,采用有限变形弹塑性有限元法,研究了单向压缩时如何用简单的幂次本构关系来逼近载荷-位移实验曲线。将这一本构关系推广到多维弹塑性大变形,用于解决金属成型问题时,受变形大小的限制;改用具有能量共轭关系的旋转克希霍夫应力和对数应变进行计算,则不受变形大小的限制,可得到满意的计算结果。

关键词 有限变形; 弹塑性有限元法; 金属成形

分类号 O 344. 3; O 242. 21

The Choice of Stress and Strain Occuring in Metal Finite Deformation

Xu Chunhui Huang Wenbin Wang Hongwei
(College of Applied Engineering Sciences, CAU)

Yang Qingchun
(Beijing Research Institute of Mechanical & Electric Technology)

Abstract Assuming that the elastic coefficient is a constant, using the elastoplastic finite element algorithms, and simple power hardening constitutive relation, the load-displacement curve is obtained for one dimensional. The constitutive relation for two dimensional elastoplastic finite deformation can be extended and can be used to solve the problem when the metal forging processes with the restriction of the degree of deformation. The rotated Kirchhoff's stress and logarithmic strain can be used to overcome this defect, and the good results can be obtained.

Key words finite deformation; elastoplastic finite element algorithms; metal forming

在金属成型过程中,材料在模腔内的变形机制很复杂,伴随着很大的塑性变形,是材料非线性和几何非线性的双重非线性问题。对于此问题,通常的解法是采用刚塑性模型或弹塑性模型的小变形算法,这2种算法都需要在步长很小的情况下完成^[1,2],当变形较大时,需要重复迭代多次,计算速度慢,耗费机时。笔者采用有限变形弹塑性有限元法对此问题进行了研究。

1 单向压缩本构关系

用有限变形理论研究金属的塑性成型问题,关键在于确定材料的本构关系。在有限变形理

收稿日期: 1999-12-21

国家自然科学基金资助项目

徐春晖,北京清华东路17号中国农业大学(东校区)75信箱,100083

论中有多种配对的应力应变, 一般认为, 针对同一问题的不同配对要给出相同的载荷-位移曲线, 则要求用不同的本构关系^[3]。

1.1 欧拉应力-阿耳曼西应变

欧拉应力和阿耳曼西应变是以现时坐标为基准定义的, 对于进入塑性状态的大多数金属材料来说, 体积是近似不可压缩的, 笔者认为用下列幂次形式的本构关系来逼近某些金属(例如, 铅)的实验数据非常容易, 本构关系为

$$\sigma_x / \sigma_s = - [1 + c (|e_x| - \epsilon_s)^b] \tag{1}$$

其中: σ_x 为欧拉应力, MPa; σ_s 为屈服应力, MPa; e_x 为阿耳曼西应变; ϵ_s 为屈服应力对应的应变值, 它是一个很小的数; b 和 c 是 2 个参数, 可以根据载荷-位移实验值回归得到。根据欧拉应力和阿耳曼西应变的定义, 可得

$$p = \frac{-1}{1+u} \left\{ 1 + c \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{(1+u)^2} - 1 \right) - \epsilon_s \right]^b \right\}$$

其中: p 为引入参数, 量纲 1, $p = P / (\sigma A_0)$, 这里 P 为载荷值, N; A_0 为变形前的横截面积, mm^2 ; u 为下压率, $u = (l_0 - l) / l_0$; l_0 和 l 分别为试件变形前后的长度, mm。

以金属铅为例, 取 $\epsilon_s = 0.001$, 经回归计算, 取 $b = 0.12$, $c = 0.42$ 可得到不同下压率下 p 的计算值。计算值与实验值^[2]数值接近(表 1)。可见, 可以用阿耳曼西应变和欧拉应力幂次形式的本构关系来逼近实验数据; 进一步, 将这一本构关系推广到多维时形式简单, 计算比较容易。

表 1 不同下压率下 p 的实验值与计算值

| u | 实验值 ^[2] | 计算值 | | |
|-----|--------------------|-----------|---------|---------|
| | | 用阿耳曼西应变计算 | 用格林应变计算 | 用对数应变计算 |
| 0.1 | 1.469 | 1.470 | 1.457 | 1.420 |
| 0.2 | 1.700 | 1.700 | 1.710 | 1.685 |
| 0.3 | 1.990 | 1.983 | 1.997 | 1.998 |
| 0.4 | 2.367 | 2.357 | 2.369 | 2.404 |
| 0.5 | 2.876 | 2.882 | 2.876 | 2.967 |
| 0.6 | 3.650 | 3.680 | 3.627 | 3.811 |

1.2 克希霍夫应力-格林应变

克希霍夫应力和格林应变是定义在初始位形上的应力应变, 若采用与式(1)类似的幂次本构关系, 则难以得到与实验数据一致的曲线。笔者经过试探, 认为应采用如下形式的本构关系来逼近实验数据, 即

$$\frac{S_x}{\sigma_s} = - \frac{1 + c (|E_x| - \epsilon_s)^b}{1 - 2 |E_x|} \tag{2}$$

其中: S_x 是克希霍夫应力, MPa; E_x 是格林应变; b 和 c 是 2 个参数, 可以根据载荷-位移实验值回归得到。根据克希霍夫应力和格林应变的定义, 得

$$p = \frac{-1}{1+u} \left\{ 1 + \frac{1}{2} c [1 - (1+u)^2] - \epsilon_s \right\}^b$$

以金属铅为例, 经回归计算, 取 $b = 0.24$, $c = 0.5522$, 计算结果见表 1。克希霍夫应力和格林应变之间的本构关系并非简单的幂次关系, 在推广到多维时, 形式复杂, 一般不易计算。

2 用阿尔曼西应变研究不可压材料时出现的问题

尽管用阿尔曼西应变和欧拉应力可以采用简单的幂次本构关系来逼近实验数据,但在计算过程中,存在一定的局限性,即当变形较大时,计算无法继续,下面以单向压缩为例说明。

在单向压缩时,设 x, y, z 方向的原始尺寸为 l_0, a_0, b_0 , 变形后为 l, a, b , 则不可压条件为

$$l_0 a_0 b_0 = lab \tag{3}$$

x, y, z 方向上的阿尔曼西应变 $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ 分别为

$$\epsilon_x = \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{l_0}{l} \right)^2 \right], \epsilon_y = \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{a_0}{a} \right)^2 \right], \epsilon_z = \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{b_0}{b} \right)^2 \right] \tag{4}$$

将式(4)代入式(3), 得不可压条件为

$$(1 - 2\epsilon_x)(1 - 2\epsilon_y)(1 - 2\epsilon_z) = 1 \tag{5}$$

在建立有限变形本构关系时,目前在理论上多采用小变形时的关系,这其中隐含了关系 $\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = 0$, 该关系式与不可压条件式(5)是不等价的。

2.1 正方形杆单向压缩问题

正方形杆的压缩与平面应力问题有关。这时有 $a_0 = b_0, \epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon$, 式(5)变为 $(1 - 2\epsilon_x)^2(1 - 2\epsilon_z) = 1$ 或 $v = a/a_0 = (l/l_0)^{1/2}$, 其中 $l/l_0 = 1 - u$, 这里 u 是下压率, 量纲 1, v 是横向扩张率, 量纲 1。

在有限变形本构关系中,借用了小变形时的关系 $S_{ij} = (2\bar{\sigma}/3\bar{e})\epsilon_{ij}$ 和 $S_{ij} = \sigma_{ij} - (\sigma_{ii}/3)\delta_{ij} (i=1, 2, 3; j=1, 2, 3)$ 。其中: S_{ij} 是欧拉应力偏量, MPa; ϵ_{ij} 是阿尔曼西应变; $\bar{\sigma}$ 和 \bar{e} 分别为等效应力和等效应变; σ_{ij} 为欧拉应力, MPa; δ_{ij} 为克罗内克尔符号。对于平面应力问题, 取

表 2 平面应力问题中不同下压率下 v 的理论值与计算值

$\alpha_x = 0$, 单向压缩时, $\alpha_y = 0$, 得 $\epsilon_x = -\frac{1}{2}\epsilon_z$, 于是 $v = a/a_0 = (1 - 2\epsilon_x)^{-1/2} = (1 + \epsilon_x)^{-1/2} = \{1 + 2^{-1}[1 - (l_0/l)^2]\}^{-1/2} = \{2[3 - (1 - u)^{-2}]\}^{1/2}$ 。当 $u = 0.432$ 时, $v = 2$ 。
。 u 与 v 之间的关系见表 2。

| u | 理论值 | 计算值 | |
|-----|-------|-----------|---------|
| | | 用阿尔曼西应变计算 | 用对数应变计算 |
| 0.1 | 1.054 | 1.064 | 1.054 |
| 0.2 | 1.118 | 1.180 | 1.118 |
| 0.3 | 1.195 | 1.444 | 1.195 |
| 0.4 | 1.291 | 3.000 | 1.291 |
| 0.5 | 1.414 | - | 1.414 |

2.2 z 方向有约束的单向压缩问题

z 方向有约束的单向压缩问题对应于平面应变情况, 有 $\epsilon_z = 0, b = b_0$, 式(3)变为 $(a/a_0)(l/l_0) = 1$, 即 $v = 1/(1 - u)$ 。

表 3 平面应变问题中不同下压率下 v 的理论值与计算值

在有限变形本构关系中,仍采用小变形时的本构关系 $S_{ij} = (2\bar{\sigma}/3\bar{e})\epsilon_{ij}$, 由于 $\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = 0$ 和 $\epsilon_z = 0$, 则有 $\epsilon_x = -\epsilon_y$, 于是 $v = a/a_0 = (1 - 2\epsilon_x)^{-1/2} = (1 + 2\epsilon_x)^{-1/2} = [2 - (1 - u)^{-2}]^{1/2}$ 。当 $u = 0.293$ 时, $v = 2$ 。
。计算结果见表 3。

| u | 理论值 | 计算值 | |
|-----|-------|-----------|---------|
| | | 用阿尔曼西应变计算 | 用对数应变计算 |
| 0.1 | 1.111 | 1.143 | 1.111 |
| 0.2 | 1.250 | 1.512 | 1.250 |
| 0.3 | 1.429 | - | 1.429 |
| 0.4 | 1.667 | - | 1.667 |
| 0.5 | 2.000 | - | 2.000 |

表 2 和表 3 说明用阿尔曼西应变研

究单向压缩问题时, 受到变形大小的限制; 笔者用程序对单向压缩变形进行计算也证明了这一点, 这与文献[3]的结论是一致的。

3 对数应变的使用

阿尔曼西应变所以被采用, 是因为应力应变用幂次强化规律时, 能够较好地逼近金属压缩时的载荷-位移实验曲线, 但由于使用上的限制, 应该找一种能用幂次强化规律, 而又不受限制的应力应变配对。根据文献[4], 具有能量共轭关系的旋转克希霍夫应力和对数应变可以实现这种要求。

对数应变在 x, y 和 z 这 3 个方向上的定义 E_x, E_y 和 E_z 分别为

$$E_x = \ln(l/l_0), E_y = \ln(a/a_0), E_z = \ln(b/b_0) \quad (6)$$

根据式(6), 有 $E_x + E_y + E_z = \ln(lab/l_0a_0b_0) = 0$, 该式与不可压条件 $E_x + E_y + E_z = 0$ 完全统一, 将小应变时的本构关系推广到有限变形时不会遇到困难。但式(6)的对数应变只适用于主轴方向, 如果 x, y, z 不是主轴方向, 则 E_x, E_y, E_z 要先按主轴方向定义出的对数应变 E_1, E_2, E_3 , 由应变转换公式得出。在采用旋转克希霍夫应力和对数应变为幂次规律后, 有 $|\sigma_i/\sigma_s| = 1 + c(|E_i| - \epsilon)^b$, 可得 $p = (1 - u)^{-1} \{1 + c[-\ln(1 - u) - \epsilon]^b\}$ 。

以铅为例, 取 $b = 0.29, c = 0.538$, p 的计算值见表 1。用对数应变计算平面应力问题和平面应变问题的结果分别见表 2 和表 3。

4 平面问题有限元法

采用单向压缩时金属材料的幂次本构关系, 用多维时的等效应变代替单向应变, 用等效应力代替单向应力, 假设材料在变形过程中体积不可压缩, 推广到多维弹塑性大变形本构关系, 进而得到平面应力和平面应变的本构关系。

按照 Mises 等向强化模型, 在比例加载的条件下, 本构关系可推广为

$$\bar{\sigma} = \sigma_s + c(|\bar{e}| - \epsilon)^b$$

由于联系应力应变的几何矩阵 D 是等效应变 \bar{e} 的函数, 所以首先要找出联系应力增量 $d\sigma$ 与应变增量 de 的切线几何矩阵 D_t , 使得 $d\sigma = D_t de$, 然后构造切线刚度矩阵, 用牛顿-拉夫森方法迭代求解。由虚功原理, 可得单元体的平衡方程

$$\Psi = P - d \iint_B \sigma^T \det J \, dA_0 \quad (7)$$

其中: Ψ 为残余力矩阵, P 为不平衡力矩阵, d 为单元现时厚度, B 为应变几何矩阵, σ 为应力矩阵, $\det J$ 为雅可比矩阵行列式的值, A_0 为变形前单元面积。根据式(7), 可得增量形式的平衡方程为

$$\Delta \Psi = P - d \iint_B \Delta \sigma^T \Delta \det J \, dA_0 + d \iint_B \Delta B^T \sigma \det J \, dA_0 = K_t \Delta u$$

其中: $\Delta \Psi$ 为残余力增量矩阵, $\Delta \sigma$ 为应力增量矩阵, ΔB 为应变增量几何矩阵, K_t 为切线刚度矩阵, Δu 为位移增量矩阵。

5 数值结果

以铅条(断面取为正方形)平面应变压缩变形为例, 用根据有限变形弹塑性有限元法所编

程序进行了计算,得到在压缩过程中作用在变形物体上的 p 值与下压率的关系,和其他多种方法所得结果对比见图1。用本文所述的阿尔曼西应变和对数应变进行计算,结果见图2。可见用阿尔曼西应变计算有局限性,而用对数应变计算则可以一直进行下去。

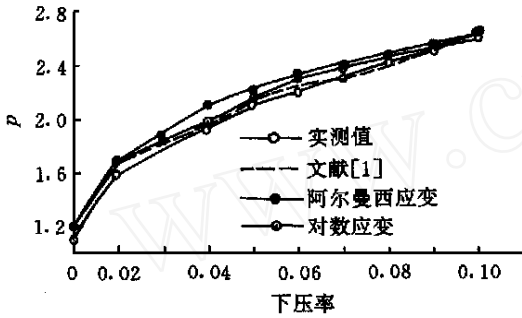


图1 几何方法所得 p 值与下压率关系比较

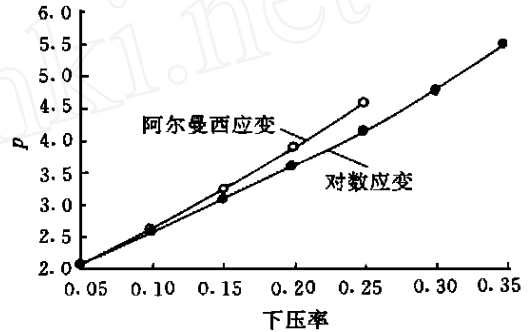


图2 下压率增大时 p 值的计算结果

6 结论

该研究是以金属铅压缩实验结果为基础而进行的。一般来讲,假设弹性系数为常数,金属为各向同性,在成型过程中体积不变,且屈服面等向强化,在小变形时,当应力超过屈服极限以后应力应变之间关系为幂次强化关系,则可以得到以下结论: 1) 用有限变形弹塑性有限元法解决金属成型问题,可以在大步长的情况下得到较好的结果。2) 阿尔曼西应变和欧拉应力可以用简单的幂次本构关系逼近压缩时的载荷-位移实验曲线。3) 用阿尔曼西应变求解平面应力或平面应变问题,受到变形限制;改用具有能量共轭关系的旋转克希霍夫应力和对数应变,采用幂次强化本构关系进行计算,可以得到满意的计算结果。

参 考 文 献

- 1 林 桐,周宝琨 用刚塑性有限元法计算塑性压缩过程金属流动 锻压技术, 1981, 6(5): 7~ 14
- 2 王红卫 几种弹塑性有限元算法及其在某些金属成型问题中的应用: [学位论文] 北京: 中国农业大学, 1998
- 3 黄文彬 杆件在大变形时弹性系数 力学与实践, 1996, 18(6): 12~ 14
- 4 魏祖健, 黄文彬, 李明瑞, 等 牛顿迭代求解有限变形弹塑性有限元问题的一致切线模量 见: 力学 40 周年编委会 现代力学与科技进步. 北京: 清华大学出版社, 1997. 1009~ 1014