中国农业大学学报 2000, 5(2): 87～91
Journal of China Agricultural University

二维工程图形中相切关系分析及计算机编码方法

梅树立① 江景涛 陈忠良 张 强
(中国农业大学计算机网络中心) (中国农业大学工程基础科学部)

摘 要 相切约束从位置关系上来说是一种较复杂的约束, 多数相切约束存在多解情况, 从多解中确定出和原来图形相符的解是图形参数化系统能否正确进行尺寸驱动的关键。为此, 在深入研究二维工程图形中常见相切位置关系的基础上, 结合矢量叉积的概念, 给出了一种确定图元相切位置关系的方法。

关键词 相切约束; 矢量叉乘; 基准直线
分类号 TP 391.72

The Analyzing and Computer Recognizing the Tangent Relations Between 2 Objects in 2D Drawings

Mei Shuli Jiang Jingtao Chen Zhongliang Zhang Qiang
(Computer Network Center, CAU) (College of Applied Engineering Sciences, CAU)

Abstract Tangent relation is one kind of complicated constraints. Multiple solutions exist in most questions on tangent constraint. In 2D drawing parametric system, obtaining the solution matched with original drawing is the key point for modifying drawings correctly. Therefore, several kinds of tangent relations are studied. A new method used for confirming tangent relations among different drawing elements is presented. By using this method the tangent relations can be recognized by computer.

Key words tangent constraint; vector cross product; base line

在工程图形的参数化设计中, 一般将图元间的相互位置关系如平行、垂直、相切等作为结构约束进行处理[1]。在各种结构约束关系中, 相切约束从位置关系上来说是最复杂的一种约束, 多数相切约束存在多解情况, 从多解中确定出和原来图形相符的解是图形参数化系统能否正确进行尺寸驱动的关键, 所以如何判断并记录工程图形中图元之间的相切位置关系并利用它进行几何推理计算是图形参数化的重要问题。笔者在深入研究各种相切位置关系的基础上, 提出用矢量叉乘法确定图元间的相切位置关系。

1 矢量叉乘法的基本原理

为叙述方便, 首先给出基准直线的定义。基准直线: 本身不是切线, 但在参数化图形尺寸驱动修改后, 和图形中某一切线相对位置保持不变的辅助直线称为该切线的基准直线。常见的基准直线有给定点和切圆圆心之间的连线, 如图 1 中的直线 AO, 2 圆圆心连线等。

所谓矢量叉乘法, 就是利用数学矢量的概念, 人为给图形中某一切线和与之相关的基准直

收稿日期: 1999-10-20
①梅树立, 北京清华东路 17 号 中国农业大学(东校区) 214 信箱, 100083

线赋于方向，使之具有矢量的性质，然后利用基准直线矢量和切线矢量叉乘结果的符号确定基准直线和切线之间的相对位置关系，从而解决相切情况多解问题的一种方法。由此可见基准直线的选取是矢量叉乘法的关键，选择基准直线应遵循以下原则：首先能够将各种可能的相切情况区分开来；其次，基准直线应是确定的直线。

在以下讨论中假定矢量叉乘结果遵循右手法则，并规定垂直纸面向外的方向为正方向，该方向单位矢量为 k。

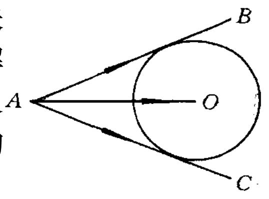


图 1　基准直线定义

2　相切分析及相切位置的确定[2]

2.1　直线过 1 给定点且切于 1 给定圆

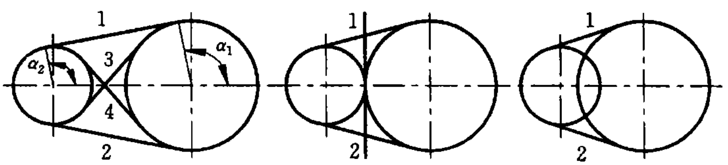
这种情况一般有 2 解，如图 1 所示，以给定点 A 作为矢量起点，沿切线方向做矢量 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$，从 A 向圆心 O 做矢量 $\overrightarrow{AO}$ 作为基准直线，利用矢量积 $(\overrightarrow{AO}\times\overrightarrow{AB})\mathrm{k}$ 的正负号确定切线相对于圆的位置。在 AutoCAD 中，如果已经确定某直线和已知圆相切，取直线起点作为矢量起点，按上述方法计算出矢量积的正负号并记录在整型变量 p 中，在尺寸驱动图形更改之后，利用 p 值判断 2 个可能的切线位置中哪个是合理位置。

2.2　1 直线切于 2 给定圆

直线切于 2 给定圆可分为 2 给定圆相离、相切、相交 3 种情况，分别有 4, 3, 2 个解，如图 2 所示。参数化系统要记录工程图形中直线的确切位置，可按以下步骤进行：

1) 判断 2 给定圆的相互位置。相离、相切还是相交。

2) 对于相离或相切的情况，还要判断直线与 2 给定圆内切还是外切。图 2 中 α_1 和 α_2 分别为 2 切点和各自所在圆的圆心连线与 x 轴正向之夹角，如果 $\alpha_1=\alpha_2$，则直线与 2 给定圆外切，反之则为内切。



(a) 2给定圆相离　(b) 2给定圆相切　(c) 2给定圆相交

图 2　直线与 2 给定圆相切

3) 确定基准直线。以直线起点 A 所在圆 O_1 作为基准圆，以 A 为矢量起点，另一圆的圆心 O_2 为终点做一矢量 $\overrightarrow{AO_2}$，以 $\overrightarrow{AO_2}$ 作为基准直线。

4) 沿切线方向做另一矢量 $\overrightarrow{AB}$，如图 3 所示。如果 $(\overrightarrow{AO_2}\times\overrightarrow{AB})\cdot\mathrm{k}<0$，切线相对于给定圆的位置如图 3(a) 所示；如果 $(\overrightarrow{AO_2}\times\overrightarrow{AB})\cdot\mathrm{k}>0$，切线相对于给定圆的位置如图 3(b) 所示。对于内切情况，处理方法与上述步骤类似。

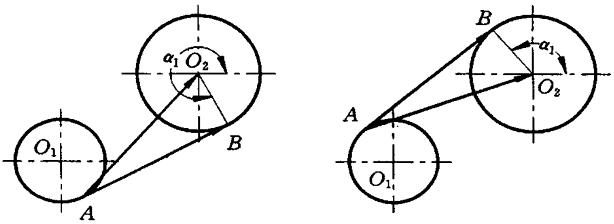


图 3　直线与 2 给定圆相切位置的判定

2.3　圆弧或圆切于1给定直线和1给定圆

1) 给定圆与给定直线分离。如图 4 所示，通过给定圆圆心 O 做 1 条垂直于给定直线 MN 的直线，与给定圆交于 2 点，这 2 点分别称为近点和远点。近点和远点与给定直线 MN 的距离

分别记为 l_1 和 l_2, 切圆直径记为 d_1。切圆与给定圆及给定直线的相对位置关系如下:

$d_1 < l_1$, 无解; $d_1 = l_1$, 1 解; $l_1 < d_1 < l_2$, 2 解; $d_1 = l_2$, 3 解; $d_1 > l_2$, 4 解。其中 $d_1 > l_2$ 是最一般的情况, 其他各种情况均是其特例, 图 5(a) 示出了 4 解的情况。

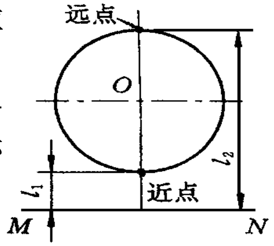


图 4　定直线与定圆间的远点和近点

2) 给定圆与给定直线相切。这种情况一般有 2 解, 如图 5(b) 所示。若切圆的半径恰好等于已知圆的半径时有 3 解, 不过第 3 解和已知圆重合, 称为平凡解, 无实际意义。

3) 给定圆与给定直线相交。当切圆半径大于给定圆半径时有 4 解; 当所给切圆直径小于给定直线分割圆所形成的 2 个弓形中较小者的弦高时, 可达 8 个解, 如图 5(c) 所示。

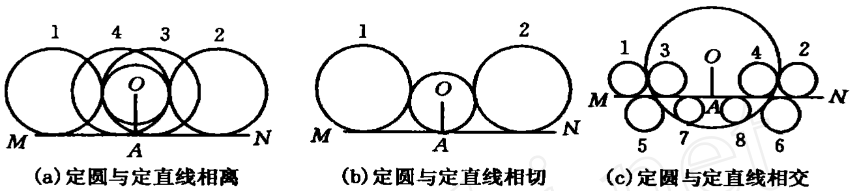


图 5　圆弧或圆切于 1 给定直线和 1 给定圆

以上分析了圆弧切于给定直线和给定圆时可能的几种位置情况, 从中不难看出前 2 种情况是最后一种情况的特例, 所以下面以最后一种情况(图 5(c)) 为例说明如何利用矢量叉乘法确定切圆的位置。

前已述及, 要确定切圆与给定直线及给定圆的相互位置关系需要有一基准线, 由于在 AutoCAD 中直线是具有方向性的, 所以仍然以给定直线作为基准来确定切圆和给定直线的相对位置关系; 切圆和给定圆之间的位置关系通过以下方法确定: 从给定圆圆心 O 向给定直线 MN 作垂线 OA, 垂足是 A, 以矢量 $\overrightarrow{AO}$ 作为基准。有了以上约定, 就可以按以下步骤确定切圆的 8 种位置。

1) 根据给定直线与给定圆的相对位置(相离、相切、相交) 筛选出尽可能少的相对位置种类。

2) 以直线 MN 的起点 M 为矢量起点分别做矢量 $\overrightarrow{MN}$ 和 $\overrightarrow{MC}$ (C 是切圆圆心), 若 $(\overrightarrow{MN} \times \overrightarrow{MC}) \cdot k > 0$, 则切圆相对于给定直线的可能位置是 1, 2, 3, 4 这 4 种, 若 $(\overrightarrow{MN} \times \overrightarrow{MC}) \cdot k < 0$, 则切圆相对于给定直线的可能位置是 5, 6, 7, 8 这 4 种。

3) 确定切圆与给定圆属于内切还是外切: 切点在各自圆上的角度相等属于内切, 相反则是外切。此时已将 8 个位置分成了 4 部分。

4) 利用矢量叉乘 $(\overrightarrow{AO} \times \overrightarrow{AC}) \cdot k$ 结果确定切圆相对于辅助线 AO 的位置。

2.4　圆弧切于 2 给定直线

这种情况相对比较简单, 当 2 条直线平行时有无穷多解, 当 2 条直线相交时通常有 4 解, 如图 6 所示, 现只讨论 2 条直线相交时切圆位置的确定过程。首先在 2 条给定直线中选择 1 条作为基准线: 假设 2 条给定直线分别为 AB 和 DE, 如果相应的 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DE}$ 有 $(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{DE}) \cdot k > 0$, 则

以直线AB 为基准线, 相反则以DE 为基准线。然后, 利用矢量叉乘法确定切圆位置, 方法同前。

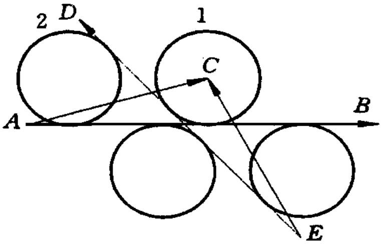


图 6　圆切于给定 2 直线

2.5　圆弧切于 2 给定圆

根据 2 给定圆的相对位置关系, 相切关系可分为 2 给定圆相离、相交、相含 3 种情况讨论。讨论之前首先给出近点和远点的概念。

如图 7 所示, 过 2 给定圆圆心O_1 和O_2 做 1 条直线与 2 给定圆相交于E, F, G, H　4 点, 外端 2 点称为远点, 内侧 2 点为近点, 2 远点之间的距离和 2 近点之间距离分别用 l_{EH}, l_{FG}表示。

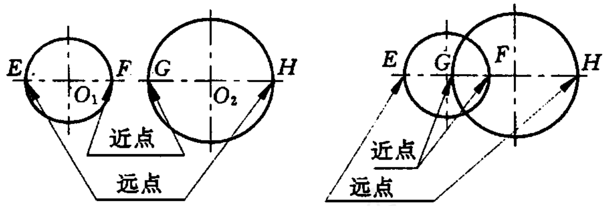
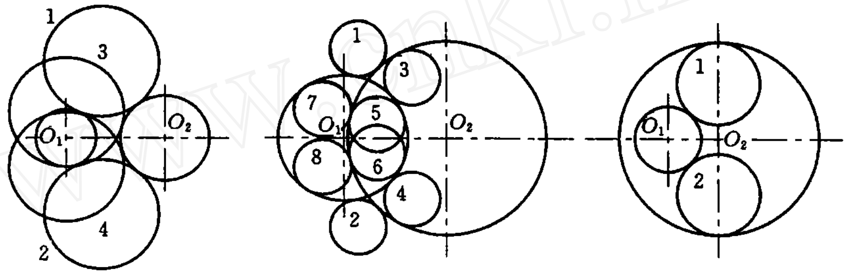


图 7　2 给定圆间的远点和近点

1) 2 给定圆分离。假设切圆的直径为 d_2, 切圆相对于给定圆的位置如下:

$d_2 < l_{FG}$, 无解; $d_2 = l_{FG}$, 1 解; $l_{FG} < d_1 < l_{EG}$, 4 解; $d_2 = l_{EH}$, 5 解; $d_2 > l_{EH}$, 8 解。其中 4 解情况如图 8(a)所示。



(a) 2给定圆相离　　(b) 2给定圆相交　　(c) 2给定圆相含

图 8　圆弧切于 2 给定圆

在一般工程图形中, 切圆一般以连接圆弧形式出现, 本文中以有 8 解的情况为例, 说明如何确定切圆的相对位置。如图 9 所示, 圆O_1 和O_2 为 2 给定圆, 以O_1 为基准圆。虚线圆为 8 个可能有的切圆位置。从图中不难看出: 切圆 1, 3, 5, 7 和 2, 4, 6, 8 相对于直线O_1O_2 是对称的, 可以通过矢量叉乘结果的正负确定切圆在直线O_1O_2 的哪一侧; 位置 1, 3, 5, 7 和 2, 4, 6, 8 的进一步再分, 可直接利用和圆O_1, O_2 的相切关系来确定, 如位置 1 和 2 给定圆同时外切, 位置 5 内切于圆O_1、外切于圆O_2 等。

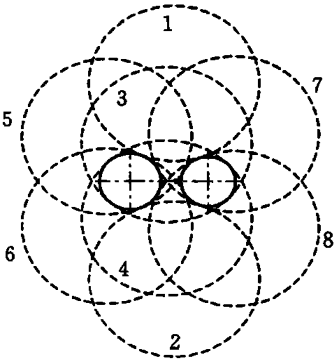


图 9　切圆的 8 个可能位置

2) 2 给定圆相交。2 给定圆相交(图 8(b))与 2 给定圆相离的情况类似, 省略详细分析过程, 下面只给出各种情况解的数量。

$d_2 < l_{FG}$, 8 解;　$d_2 = l_{FG}$, 7 解;　$l_{FG} < d_2 < l_{EG}$, 6 解;　$d_2 = l_{FH}$, 3 解;　$d_2 = l_{EH}$, 3 解;　$l_{EG} < d_2 < l_{FH}$, 4 解;　$d_2 = l_{EG}$, 5 解;　$d_2 > l_{EH}$, 4 解;　$l_{FH} < d_2 < l_{EH}$, 2 解。

具体位置的确定仍采用矢量叉乘法结合内、外切情况判断。

3) 2 给定圆相含。如图 8(c), 这是一种最简单的情况, 下面是各种条件下解的情况:

$d_2 < l_{FH}$, 无解;　$d_2 = l_{EG}$, 1 解;　$l_{EG} < d_2 < l_{FH}$, 1 解;　$d_2 = l_{FH}$, 1 解;　$d_2 > l_{FH}$, 无解。

对于 2 解的情况, 直接采用矢量叉乘法便可将 2 种情况区分开。

3　举　例

在一幅工程图形中, 所有图形元素之间都可能存在结构约束, 因此, 需要对所有图元进行分析比较[3]。确定它们之间是否存在结构约束关系以及存在何种约束关系, 关键是约束方程的建立。下面以直线切于 2 圆为例说明约束关系的识别过程。

如图 3 所示, 判断直线 AB 和圆 O_1, O_2 是否相切, 切于什么位置。

设直线的端点及 2 已知圆的圆心坐标分别为 $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $O_1(x_1, y_1)$, $O_2(x_2, y_2)$, 2 给定圆的半径分别为 R_1 和 R_2。直线 AB 的方程为

$$ax + by + c = 0$$

直线和圆相切的约束方程可以表达为

$$\begin{cases} |ax_1 + by_1 + c| = R_1(a^2 + b^2)^{1/2} \\ |ax_2 + by_2 + c| = R_2(a^2 + b^2)^{1/2} \end{cases}$$

其中 a, b, c 为直线的线坐标。

首先确定上述方程组是否成立, 如果成立, 说明直线 AB 和 2 给定圆同时相切。其次判断直线和 2 个给定圆内切还是外切, 判断方法是分别求出 2 个切点和各自所在圆圆心连线与 x 轴正向夹角 α_1 和 α_2。若 $\alpha_1 = \alpha_2$, 则直线与 2 给定圆外切; 相反, 直线与 2 给定圆内切。其中:

$$\alpha_1 = \arctan[(y_A - y_1)/(x_A - x_1)], \quad \alpha_2 = \arctan[(y_B - y_2)/(x_B - x_2)]$$

最后使用前述矢量叉乘法确定切线的确切位置:

$$\overrightarrow{AC} = (x_2 - x_A)\mathrm{i} + (y_2 - y_A)\mathrm{j}, \quad \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\mathrm{i} + (y_B - y_A)\mathrm{j}$$

式中 i, j 分别为 x, y 轴方向的单位矢量。

$$\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB} = [(x_2 - x_A)(y_B - y_A) - (y_2 - y_A)(x_B - x_A)]\mathrm{k}$$

$$p = (x_2 - x_A)(y_B - y_A) - (y_2 - y_A)(x_B - x_A)$$

根据 p 大于或小于 0 最终确定切线的位置。至此, 一个相切约束识别完毕。

4　结　论

将矢量叉乘法原理引入二维工程图形的相切关系分析, 可正确处理工程图形中相切约束的多解情况。该方法以矢量方向作为判断相切位置的依据, 不会因图形的旋转变化而产生错误, 从而提高了参数化图形尺寸驱动修改的灵活性。

参　考　文　献

1　胡树根. 一种基于约束的多视图尺寸驱动方法及实现. 中国机械工程, 1998, 9(7): 40～43

2　梅树立. 基于约束分析的工程图参数化设计(视图联动)及装配图 CAD 的研究: [学位论文]. 北京: 中国农业大学, 1999

3　陈立平. 基于实例图形的几何约束满足策略. 计算机辅助设计与图形学学报, 1996, 8(5): 381～388