中国农业大学学报　1998,3(2):16～18
Journal of China Agricultural University

一非线性混合整数规划问题

王兆智[①]　王来生
(中国农业大学工程基础科学部)

摘　要　对一有界约束非线性混合整数规划问题进行了研究。通过对该问题性质的分析,把它变成了一个等价的、易求解的纯整数规划问题,并给出了原问题相应的算法。

关键词　非线性整数规划;有界约束;最优解
中图分类号　O 221.2

A Nonlinear Mixed Integer Programming Problem

Wang Zhaozhi　Wang Laisheng
(College of Applied Engineering Sciences, CAU)

Abstract　The problem of bounded nonlinear mixed integer programming is studied. The nonlinear problem is transformed into an equivalent pure integer problem which can be solved easily. The algorithm for calculating the prime problem is constructed.

Key words　nonlinear integer programming; bounded constraint; optimal solution

在研究无约束最优化问题的算法效率时,经常遇到下述极小化问题。记

$$Q_N = n^3/6 + 3n^2/2 - 2n/3 \tag{1}$$

$$Q_{CG} = 2n^2 + 6n + 2 \tag{2}$$

其中 n 为自然数。用$[\cdot]$表示大于等于括弧内数的最小整数,则可将所考虑的问题描述为

$$\min f(p,\varepsilon) = \frac{Q_N + \left(\left[\dfrac{\ln p}{\ln(2+\varepsilon)}\right] - 1\right) p Q_{CG}}{\left[\dfrac{\ln p}{\ln(2+\varepsilon)}\right] Q_N} \tag{3a}$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 3 \leqslant p \leqslant \dfrac{Q_N}{Q_{CG}} \\ 0 < \varepsilon < 1 \\ p \text{ 为整数} \end{cases} \tag{3b}$$

这是一个有上、下界约束的非线性混合整数规划问题,用传统的非线性规划方法和整数规划方法[1,2]难以求解。笔者通过对问题(3)进行一系列性质分析,从而把它转化为一个等价的、容易求解的纯整数规划问题,并进一步给出原问题的优化方法。

性质 1　存在 $\bar{\varepsilon} > 0$,当 $\varepsilon \leqslant \bar{\varepsilon}$ 时,若自然数 i 满足 $p \in [2^{i-1}+1, 2^i]$ 是可行解,则

$$\bar{p} \triangleq \left[\frac{\ln p}{\ln(2+\varepsilon)}\right] \equiv i \tag{4}$$

证明:对给定的 i,存在 $\varepsilon(i) > 0$,当 $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon(i)$ 时,有

收稿日期:1997-10-28

①王兆智,北京清华东路 17 号 中国农业大学(东校区)71 信箱,100083

$$(2+\varepsilon)^{i-1}<2^{i-1}+1 \tag{5}$$

令

$$\bar{\varepsilon}=\min\{\varepsilon(i)\mid i \text{ 满足题设}\}$$

那么，当 $\varepsilon\leqslant\bar{\varepsilon}$ 时，若 $p\geqslant 2^{i-1}+1$，由式(5)有

$$\frac{\ln p}{\ln(2+\varepsilon)}>i-1 \tag{6}$$

另外，$(2+\varepsilon)^i>2^i$。从而，当 $p\leqslant 2^i$ 时，有

$$\frac{\ln p}{\ln(2+\varepsilon)}<i \tag{7}$$

由式(6)和(7)，当 $\varepsilon\leqslant\bar{\varepsilon}$ 时，若 $p\in[2^{i-1}+1,2^i]$，则式(4)成立。证毕。

性质 2　对于问题(3)的可行解(p,ε)，有

$$f(p,\varepsilon)\geqslant f(p,\bar{\varepsilon}) \tag{8}$$

其中 $\bar{\varepsilon}$ 是在性质 1 中确定的。

证明：设 $1>\varepsilon'>\varepsilon''>0$，则

$$\left[\frac{\ln p}{\ln(2+\varepsilon')}\right]\leqslant\left[\frac{\ln p}{\ln(2+\varepsilon'')}\right]$$

注意到约束条件 $Q_N\geqslant pQ_{CG}$，得

$$f(p,\varepsilon')\geqslant f(p,\varepsilon'') \tag{9}$$

由性质 1，当 $\varepsilon\leqslant\bar{\varepsilon}$ 时，有

$$\left[\frac{\ln p}{\ln(2+\varepsilon)}\right]=\left[\frac{\ln p}{\ln(2+\bar{\varepsilon})}\right]$$

$$f(p,\varepsilon)=f(p,\bar{\varepsilon}) \tag{10}$$

由式(9)和(10)，对任意可行解(p,ε)，式(8)成立。证毕。

性质 3　当 $p\in[2^{i-1}+1,2^i]$ 是问题(3)的可行解时，有

$$f(p,\bar{\varepsilon})\geqslant f(2^{i-1}+1,\bar{\varepsilon}) \tag{11}$$

证明：当 $p\in[2^{i-1}+1,2^i]$，且满足式(3.2)时，由性质 1 知

$$\bar{p}=\left[\frac{\ln p}{\ln(2+\bar{\varepsilon})}\right]=i$$

再由式(3.1)，当 p 取 $2^{i-1}+1$ 时，$f(p,\bar{\varepsilon})$在区间$[2^{i-1}+1,2^i]$上达到最小，即式(11)成立。证毕。

令 $p=2^{i-1}+1$，得问题(3)的一个等价问题。

定理 4　当 $\varepsilon<\bar{\varepsilon}$ 时，问题(3)等价于下述问题：

$$\min f(i)=\frac{Q_N+(i-1)(2^{i-1}+1)Q_{CG}}{iQ_N}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}3\leqslant 2^{i-1}+1\leqslant\dfrac{Q_N}{Q_{CG}}\\ i\text{ 为自然数}\end{cases} \tag{12}$$

证明：由式(3)，(8)和(11)得证。证毕。

定理 4 表明，在问题(3)的最优解(p^*,ε^*)处，p^*不依赖于 ε^*。实际上，对于 $\varepsilon\leqslant\bar{\varepsilon}$，$(p^*,\varepsilon)$都是最优解，从而构造出求解问题(3)的算法，步骤如下：

1)利用 n 的值，由式(1)和(2)计算 Q_N 及 Q_{CG}；

2)用枚举法求式(12)的最优解 i^*，则 $p^*=2^{i^*-1}+1$ 为问题(3)的解。

实际问题中，求解问题(3)主要是要得到 p^*。用此算法可很容易地求解。另外，实际问题中的 n 最大只有几千，算法中第2步对 i 穷举的次数也不过10多次，计算量很少。

表1给出了在 n 取不同值时问题(3)的最优解 p^* 和最优值 f^*（当 ε 充分小时就是最优解，实际问题中并不必具体写出 ε^* 的值）。

表1 问题(3)的最优解 p^* 和最优值 f^*

n	50	100	200	400	600	800	1 000
p^*	3	3	5	5	9	9	9
f^*	0.83	0.67	0.53	0.43	0.38	0.35	0.33

参考文献

1 钱颂迪主编.运筹学.北京:清华大学出版社,1990.116～135

2 袁亚湘,孙文瑜.最优化理论与方法.北京:科学出版社,1997.599～627