非正弦电路广义功率和特征参数的定义

杨仁刚[①] 唐统一 孙树勤
（电子电力工程学院） （清华大学）

摘 要 将多相电压和电流函数定义为Hilbert内积空间的2个向量，并应用正交投影定理对电流向量作正交分解，在此基础上给出了普遍适用的广义功率及其特征参数的定义表达式，并讨论了它们的性质。

关键词 非正弦电路；广义功率；Hilbert内积空间
中图分类号 TM131.43

Definition of Generalized Reactive Power and Characteristic Parameters in Nonsinusoidal Circuits

Yang Ren'gang Tang Tongyi Sun Shuqin
(College of Electronic and Electric Power Engineering, CAU) (Tsinghua University)

Abstract Multiphase voltage and current functions are defined to be two vectors in Hilbert inner product space and orthogonal resolution of current vector is taken by using the projection theorem. The expressions of the definitions of universally adapted generalized powers and characteristic parameters are given and their properties are discussed.

Key words nonsinusoidal circuit; generalized power; Hilbert inner product space

随着大容量电力电子器件与装置的应用和发展，电力系统负荷的非正弦、不对称等特征日益突出，传统的无功定义和补偿理论难以满足生产实践的需要，而电力系统的分析、控制、测量、无功补偿、能耗和管理等诸多问题的合理解决，无一不与功率的定义密切相关。

半个多世纪以来，国内外学者对非正弦波形下无功功率、不对称及高次谐波的理论和补偿问题作了大量研究，先后提出了10多种不同的无功定义，研究方法可概括为频域法[1]、时域法[2]、频域时域结合法[3]和向量法[4]。尽管定义的种类繁多，但至今仍没有一种能被人们普遍接受，其主要原因是：以往的研究没有完全摆脱正弦线性电路中传统无功定义的影响，较多地注意定义的表达形式，而忽略了在正弦和非正弦2种情况下无功功率的共性，因而定义具有一定的局限性；此外，用这些定义很难对无功功率的本质作出严格和圆满的解释。无功功率定义之所以成为一个难题，还因难以找到一种适当的描述方法，对定义的合理性也缺少判断准则。

收稿日期：1996-01-09
①杨仁刚，北京清华东路17号中国农业大学（东校区）62信箱，100083

无功功率既然是一种客观存在,那么在单相与多相,正弦与非正弦,对称与非对称电路中都应该有相同的内涵,因而系统电量的定义及性质应该具有一定程度的统一性。人们期望非正弦多相电源系统的各种功率及其特征参数与单相正弦线性电路传统的定义具有相同的表达形式和相同的物理意义。为此,笔者将多相交流系统放在内积空间进行讨论,定义了广义功率和广义功率因数,给出了广义等值网络和广义等值网络参数的概念。有关这些定义的物理意义和时域分析将另文讨论。

1 多相电路中的电压电流向量及其 Hilbert 空间

1.1 n 维电压电流向量

在图 1 所示的多相交流电路中,设各相电压和相电流分别为 $u_j(t)$ 和 $i_j(t)$;$j=1,2,\cdots,n$,n 为相数。设 $u_j(t)$,$i_j(t)$ 是在闭区间 $[0,T]$ 上的实值连续函数。定义 n 维电压向量 $\boldsymbol{U}$ 和电流向量 $\boldsymbol{I}$ 分别为

$$\begin{cases}\boldsymbol{U}=[u_1(t),u_2(t),\cdots,u_n(t)]\\ \boldsymbol{I}=[i_1(t),i_2(t),\cdots,i_n(t)]\end{cases}$$

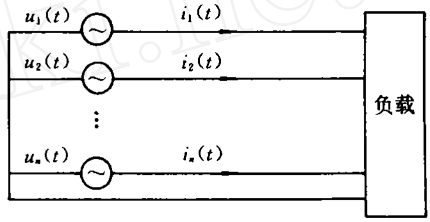

图 1 多相交流电路

1.2 $\boldsymbol{U}$,$\boldsymbol{I}$ 的内积

设 D 为实数域 R 的向量空间,且 $\boldsymbol{U},\boldsymbol{I}\in D$。在 D 内定义一个函数

$$\langle \boldsymbol{U},\boldsymbol{I}\rangle=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{T}\int_T u_j(t)i_j(t)\mathrm{d}t \tag{1}$$

即 $D\times D$ 到实数域的一个映射。容易证明(1)满足内积的4个条件:

1)$\langle \boldsymbol{U},\boldsymbol{I}\rangle=\langle \boldsymbol{I},\boldsymbol{U}\rangle$;

2)$\langle K\boldsymbol{U},\boldsymbol{I}\rangle=K\langle \boldsymbol{U},\boldsymbol{I}\rangle$;

3)$\langle \boldsymbol{U}_1+\boldsymbol{U}_2,\boldsymbol{I}\rangle=\langle \boldsymbol{U}_1,\boldsymbol{I}\rangle+\langle \boldsymbol{U}_2,\boldsymbol{I}\rangle$;

4)$\langle \boldsymbol{U},\boldsymbol{U}\rangle\geqslant 0$,且仅当 $\boldsymbol{U}=0$ 时,$\langle \boldsymbol{U},\boldsymbol{U}\rangle=0$。

因此 $\langle \boldsymbol{U},\boldsymbol{I}\rangle$ 为 D 中的内积,其向量空间 D 为内积空间。可以认为内积空间 D 是完备的,即为 Hilbert 空间。

应该指出,$\langle \boldsymbol{U},\boldsymbol{I}\rangle$ 实际上就是多相系统的总有功功率,即把多相系统的总有功功率定义为向量空间 D 中向量 $\boldsymbol{U}$ 与 $\boldsymbol{I}$ 的内积。无论是在正弦还是非正弦、对称还是不对称、单相还是多相的交流电路中,有功功率 P 都可以用同一表达式表示,即 P 是广义的。

1.3 $\boldsymbol{U}$,$\boldsymbol{I}$ 的长度(范数)

根据内积空间关于向量范数的定义,内积空间 D 中电压向量 $\boldsymbol{U}$ 和电流向量 $\boldsymbol{I}$ 的长度(范数)分别为

$$\|\boldsymbol{U}\|=\sqrt{\langle \boldsymbol{U},\boldsymbol{U}\rangle}=\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{T}\int_T u_i^2\mathrm{d}t}$$

$$\|\boldsymbol{I}\|=\sqrt{\langle \boldsymbol{I},\boldsymbol{I}\rangle}=\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{T}\int_T i_i^2\mathrm{d}t}$$

显然,$\|\boldsymbol{U}\|$ 为多相系统中各个相电压有效值的均方根值,$\|\boldsymbol{I}\|$ 为相电流有效值的均方根值;

所以$\|U\|$,$\|I\|$是某种意义上的有效值。例如当$n=1$时,$\|U\|$为单相电路电压有效值;在n相正弦对称系统中,$\|U\|=\sqrt{n}U_{相}$,即n相系统线电压的有效值。

1.4 U,I间夹角的余弦

将内积空间非零向量U,I间夹角的余弦规定为

$$\cos\varphi=\frac{\langle U,I\rangle}{\|U\|\|I\|}$$

根据柯西-许瓦兹不等式,对于任意的向量U,I,有

$$\|\langle U,I\rangle\|\leqslant\|U\|\|I\|$$

即 $\cos\varphi\leqslant 1$

1.5 有功电流向量与无功电流向量

依照向量分解的方法可将电流向量I分解成2个分量,即与U同方向的分量kI_v和另一个分量I_e(图2),即

$$I=kI_v+I_e$$

其中$I_e(=I-kI_v)$称为误差向量,k为实常系数。

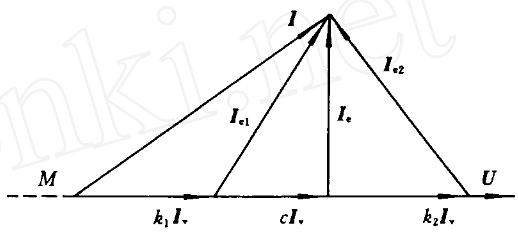

图2 向量分解示意图

沿U方向分解出kI_v并使I_e的长度$\|I-kI_v\|$最小,即误差向量最小,从几何意义上讲,就是用一个沿着U方向的向量kI_v来逼近I,并要求其误差为最小。显然,满足这个条件的kI_v是唯一的,且这样分解将使误差向量I_e正交于U。为了区别,这时的k用c表示,cI_v记为I_p,为有功电流向量;I_e记为I_q,为无功电流向量;且有

$$I=I_p+I_q \tag{2}$$

式(2)为I在U方向上的正交分解,且I_p为I在U上的正交投影。

用数学语言表示则为:设子集$M=U$,则I在U上的投影

$$I_p=\mathrm{proj}\langle I|U\rangle=\|I\|\|U\|\cos\varphi\frac{U}{\|U\|^2}=\langle\|I,U\|\rangle\frac{U}{\|U\|^2} \tag{3}$$

从物理意义上讲,I与I_p分量越接近,则越相似,同时误差向量也就越小。I在U方向上的正交投影为cI_v,系数c表明这2个向量的相似程度。如果$c=0$,则I在U方向上的分量为零,两向量互相垂直,说明两向量无共同之处,称之为正交向量。正交向量是相互无关的独立向量。

2 广义功率定义及其性质

2.1 广义功率定义

2.1.1 广义有功功率

由于有功功率P是广义的,即$P=\langle U,I\rangle$适用于任何交流系统,故称为广义有功功率。

广义有功电流向量I_p的范数

$$\|I_p\|=\langle U,I\rangle\frac{\|U\|}{\|U\|^2}=\frac{\langle U,I\rangle}{\|U\|}$$

因而

$$P=\langle U,I\rangle=\|U\|\|I_p\|$$

即广义有功功率等于电压向量的范数与广义有功电流向量的范数之积。

2.1.2 广义视在功率与广义功率因数

采用与传统功率定义相同的形式，将电压向量的范数(某种意义下的有效值)与电流向量的范数之积定义为广义视在功率 S，即

$$S=\|\boldsymbol{U}\|\|\boldsymbol{I}\|$$

将电压向量与电流向量夹角的余弦定义为广义功率因数 λ，即

$$\lambda=\cos\varphi=\frac{\langle \boldsymbol{U},\boldsymbol{I}\rangle}{\|\boldsymbol{U}\|\|\boldsymbol{I}\|} \tag{4}$$

显然，广义有功功率、广义视在功率和广义功率因数与传统定义下的对应量满足相同的关系 $\lambda=P/S$。

2.1.3 广义无功功率

将电压向量的范数与广义无功电流向量范数之积定义为广义无功功率，即

$$Q=\|\boldsymbol{U}\|\|\boldsymbol{I}_{\mathrm{q}}\|$$

2.2 广义功率及电流向量的性质

1)易证明，广义功率满足功率三角形关系

$$S=\sqrt{P^2+Q^2}$$

2)广义功率因数 λ 表明向量 $\boldsymbol{I}$ 与 $\boldsymbol{U}$ 的相似程度。

由有功电流向量的定义及式(3)和(4)，有

$$\boldsymbol{I}_{\mathrm{p}}=c\boldsymbol{I}_{\mathrm{v}}=\|\boldsymbol{U}\|\|\boldsymbol{I}\|\cos\varphi\frac{\boldsymbol{U}}{\|\boldsymbol{U}\|^2}=\|\boldsymbol{U}\|\|\boldsymbol{I}\|\lambda\frac{\boldsymbol{U}}{\|\boldsymbol{U}\|^2}=\lambda\|\boldsymbol{I}\|\frac{\boldsymbol{U}}{\|\boldsymbol{U}\|}=\lambda\boldsymbol{I}_{\mathrm{v}} \tag{5}$$

式中：$\boldsymbol{U}/\|\boldsymbol{U}\|$ 是沿 $\boldsymbol{U}$ 方向上的单位向量，表示 $\boldsymbol{I}_{\mathrm{p}}$ 的方向；$\|\boldsymbol{I}\|$ 是向量 $\boldsymbol{I}$ 的长度，对一个确定的向量它是一个常数；由式(5)可见系数 c 就是广义功率因数 λ。λ 越大，向量 $\boldsymbol{I}$ 与 $\boldsymbol{U}$ 就越相似；如果 $\lambda=1$，则向量 $\boldsymbol{I}$ 与 $\boldsymbol{U}$ 平行，$\boldsymbol{I}=\boldsymbol{I}_{\mathrm{p}}$；如果 $\lambda=0$，则向量 $\boldsymbol{I}$ 和 $\boldsymbol{U}$ 为正交向量，即 $\boldsymbol{I}\perp\boldsymbol{U}$。

3)$\boldsymbol{I}$ 与 $\boldsymbol{U}$ 平行的充要条件是 $\boldsymbol{I},\boldsymbol{U}$ 线性相关。$\boldsymbol{I},\boldsymbol{U}$ 平行时，电流向量全为有功分量即 $\cos\varphi=1$。

证明 令 t 为一实变数，作向量

$$\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{U}+t\boldsymbol{I}$$

对任何值 $\langle \boldsymbol{Z},\boldsymbol{Z}\rangle=\langle \boldsymbol{U}+t\boldsymbol{I},\boldsymbol{U}+t\boldsymbol{I}\rangle\geqslant 0$

即 $\langle \boldsymbol{U},\boldsymbol{U}\rangle+2\langle \boldsymbol{U},\boldsymbol{I}\rangle t+\langle \boldsymbol{I},\boldsymbol{I}\rangle t^2\geqslant 0$

取 $t=-\langle \boldsymbol{U},\boldsymbol{I}\rangle/\langle \boldsymbol{I},\boldsymbol{I}\rangle$ 代入上式，得到

$$\langle \boldsymbol{U},\boldsymbol{U}\rangle-\frac{\langle \boldsymbol{U},\boldsymbol{I}\rangle^2}{\langle \boldsymbol{I},\boldsymbol{I}\rangle}\geqslant 0$$

即 $\langle \boldsymbol{U},\boldsymbol{I}\rangle^2\leqslant\langle \boldsymbol{U},\boldsymbol{U}\rangle\langle \boldsymbol{I},\boldsymbol{I}\rangle$

两边开方，得到

$$\|\langle \boldsymbol{U},\boldsymbol{I}\rangle\|\leqslant\|\boldsymbol{U}\|\|\boldsymbol{I}\|$$

当 $\boldsymbol{U},\boldsymbol{I}$ 线性相关时，等号成立；反之，若等号成立，则有 $\boldsymbol{I}=0$，或者

$$\boldsymbol{U}-\frac{\langle \boldsymbol{U},\boldsymbol{I}\rangle}{\langle \boldsymbol{I},\boldsymbol{I}\rangle}\boldsymbol{I}=0$$

即 $\boldsymbol{U}$ 与 $\boldsymbol{I}$ 线性相关。这说明 $\cos\varphi=1$ 的充要条件是 $\boldsymbol{U},\boldsymbol{I}$ 线性相关，即 $\boldsymbol{I}=K\boldsymbol{U}$。

此时

$$I=\|I_p\|\frac{U}{\|U\|}=\frac{\|I_p\|\|U\|}{\|U\|^2}U=\frac{P}{\|U\|^2}U=I_p$$

即电流向量全部为有功分量，无功分量为零。

4）I 与 U 垂直时，有 $\langle U,I\rangle=0$，所以有功分量为零，电流向量全部为无功分量。

3　广义电参数定义

图 1 所示的多相交流系统可以抽象为用向量表示的等效单相系统（图 3），其中 $\widetilde{G}$ 为广义电导，$\widetilde{B}$ 为广义电纳，$\widetilde{Y}$ 为广义导纳。这些广义参数可以用电压和电流向量表示：

$$\widetilde{Y}=\frac{\|I\|}{\|U\|}$$

$$\widetilde{G}=\frac{\langle U,I\rangle}{\|U\|^2}=\frac{\|I_p\|}{\|U\|}$$

$$\widetilde{B}=\frac{\|I_q\|}{\|U\|}$$

广义导纳、广义电导和广义电纳满足直角三角形关系

$$\widetilde{G}^2+\widetilde{B}^2=\frac{\|I_p\|^2+\|I_q\|^2}{\|U\|^2}=\frac{\|I\|^2}{\|U\|^2}=\widetilde{Y}^2$$

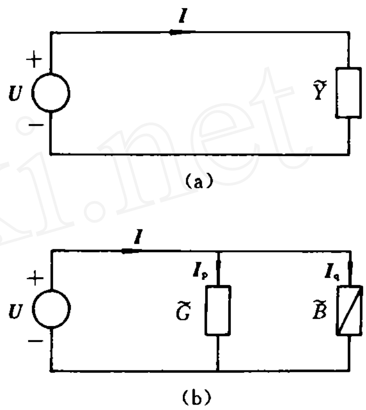

图 3　等效单相系统

4　结　　论

1）在内积空间中研究多相交流系统时所定义的广义功率和功率因数与传统的单相正弦线性系统和三相对称正弦线性系统的各种功率和功率因数的定义有相同的表达式，各量之间的关系亦相同。

2）单相正弦线性系统的传统定义认为，功率因数角为电流与电压的相位差角，而在多相系统中功率因数角没有特定意义；但是在研究内积空间的多相系统时，广义功率因数角 φ 则为电流向量与电压向量的夹角，广义功率因数 λ 的大小表征电流向量与电压向量的相似程度。

3）研究内积空间的多相系统实际上是把多相系统看作一个抽象的单相系统，这个抽象系统中的电流为电流向量，电压为电压向量，电路参数则为相应的广义等值参数；而单相正弦线性系统仅为抽象系统中向量元数 $n=1$ 时的一个特例。

参 考 文 献

1　Sharon D. Reactive power definition and power factor improvement in nonlinear systems. Proc Inst Elec Eng, 1973, 120(6): 704～706

2　Page C H. Reactive power in nonsinusoidal situation. IEEE Trans on Instrum Meas, 1980, 29: 420～423

3　Czarnecki L S. An orthogonal decomposition of the current of nonsinusoidal voltage source applied to nonlinear loads. Circuit Theory Appl, 1983, II: 235～239

4　杨仁刚. 广义无功功率及其特征参数定义及电弧炉动态无功补偿调节器研究：[学位论文]. 北京：清华大学，1993