

梁板壳结构有限变形的 普遍理论及其应用

李明瑞^①

(基础科学部)

摘要 统一地作出了梁板壳结构的运动学分析,第一次指出了有限转动矩阵的精确使用方法,从而建立起全部的完整有限变形理论,并推导出板壳有限变形的精确方程,使可替代 von-Karman 薄板大挠度方程。

关键词 梁板壳结构;有限变形;普遍理论

中图分类号 O343.5

General Theory of Finite Deformation of Beam, Plate and Shell Structures and Its Applications

Li Mingrui

(Department of Basic Sciences)

Abstract Based on the unified kinematic analysis of the beam, plate and shell structures, the following results are achieved: a method to use the finite rotation matrix exactly; the complete finite deformation theory of all kinds of structures; the exact finite deformation equations of plate and shell structures so to replace the von-Karman thin plate equations with large deflections.

Key words beam, plate and shell structure; finite deformation; general theory

梁板壳结构的有限变形理论与二维、三维连续体的有限变形理论存在着巨大的区别。二维、三维连续体对空间一点位置的描述与其位移的描述的维数是一致的,而梁板壳的位移描述中却增加了转角位移。这组转角位移事实上是对一条刚性线段绕定点转动的描述。在线性理论中角位移被看作是无穷小量,所以 $d\theta_i (i=1, 2, 3)$ 具有矢量的性质,这就是可引进角速度矢量 $\omega_i = d\theta_i/dt$ 的根据。但是有限转角 θ_i 却没有矢量性质,它们不服从矢量的可交换性法则,例如一个刚体先转 θ_x 再转 θ_y 到达的位置与先转 θ_y 再转 θ_x 到达的位置是不同的,所以正确处理有限转角是建立完整的梁板壳有限变形理论的关键。

收稿日期:1996-01-10

①李明瑞,北京清华东路17号中国农业大学(东校区)75信箱,100083

1 梁板壳结构有限变形的运动学描述

为叙述的方便,下文中所指的“结构”均为梁板壳结构。

B 为结构中的任意一点。如果对于点 B 能在结构中找到一相应的参考点 A ,使线段 AB 在有限变形过程中保持为刚性直线段,则有限变形可描述如下。

设 0 时刻结构有初始位移,此时结构中一刚性线段 AB 占有空间位置 A_0B_0 。在 t 时刻结构产生了有限变形,线段 AB 占有空间位置 A_1B_1 (如图 1 所示),则线段 AB 的运动可分解为由 A_0B_0 随点 A 平移至 A_1B_2 的牵连运动和由 A_1B_2 绕点 A_1 转动到 A_1B_1 的相对运动。将以上运动学关系用矢量公式表示为

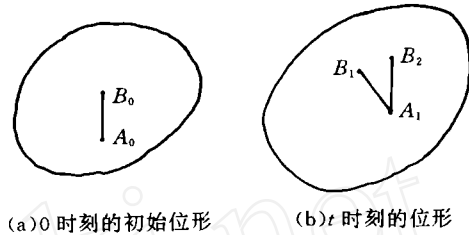


图 1 结构在不同时刻的位形示意图

$$\mathbf{V}_B = \mathbf{V}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \quad (1)$$

其中: $\mathbf{V}_B = d\mathbf{r}_B/dt$,是任意点 B 在 t 时刻的绝对速度;

$\mathbf{V}_A = d\mathbf{r}_A/dt$,是参考点 A 在 t 时刻的牵连速度;

$\boldsymbol{\omega}$ 是线段 AB 在 t 时刻绕点 A_1 转动的角速度;

\mathbf{r} 是线段 A_1B_2 的矢径;

\mathbf{r}' 是线段 AB 在 t 时刻的矢径,即 A_1B_1 。

引进矩阵 $\boldsymbol{\Theta}$, 定义为

$$\boldsymbol{\Theta} = \begin{bmatrix} 0 & -\theta_3 & \theta_2 \\ \theta_3 & 0 & -\theta_1 \\ -\theta_2 & \theta_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

则式(1)还可写成

$$\frac{d}{dt} \mathbf{r}_B = \frac{d}{dt} \mathbf{r}_A + \frac{d}{dt} \boldsymbol{\Theta} \mathbf{r}' \quad (3)$$

对式(3)由 0 到 t 积分,可得

$$\mathbf{u}_B = \mathbf{u}_A + \mathbf{r}' - \mathbf{r} \quad (4a)$$

其中

$$\mathbf{u}_B = \mathbf{r}_{B1} - \mathbf{r}_{B0} \quad (4b)$$

$$\mathbf{u}_A = \mathbf{r}_{A1} - \mathbf{r}_{A0} \quad (4c)$$

$$\mathbf{r}' = e^{\boldsymbol{\Theta}} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{r}_{B1} - \mathbf{r}_{A1} \quad (4d)$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{B0} - \mathbf{r}_{A0} = \mathbf{r}_{B2} - \mathbf{r}_{A1} \quad (4e)$$

有关式(4d)的严格证明将在附录中给出。文[1~3]第一次从复杂的几何关系导出了式(4d),但是迄今所有的研究者均未能完整地利用这个关系^[4~10],而仅是将指数矩阵展开成

$$e^{\boldsymbol{\Theta}} = \mathbf{I} + \boldsymbol{\Theta} + \frac{1}{2!} \boldsymbol{\Theta}^2 + \dots \quad (4f)$$

然后舍弃高阶项,其后果是完全不能描述有限转动。笔者从运动学关系出发进行了简练而明确

的重新证明,并提出用下面的精确方法来描述有限转动。

令 $(\lambda_1, \varphi_1), (\lambda_2, \varphi_2), (\lambda_3, \varphi_3)$ 是矩阵 Θ 的 3 个特征对。利用特征向量的无关性,则三维空间任意向量 r 可表示成 3 个特征向量的线性组合,即有

$$r = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 + c_3 \varphi_3 \quad (5)$$

将式(5)代入式(4d)和式(4f),可得

$$r' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = e^{\Theta} r = c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 + c_3 \varphi_3 + \\ c_1 \varphi_1 \lambda_1 + c_2 \varphi_2 \lambda_2 + c_3 \varphi_3 \lambda_3 + \\ \frac{1}{2!} (c_1 \varphi_1 \lambda_1^2 + c_2 \varphi_2 \lambda_2^2 + c_3 \varphi_3 \lambda_3^2) + \dots + \\ \frac{1}{n!} (c_1 \varphi_1 \lambda_1^n + c_2 \varphi_2 \lambda_2^n + c_3 \varphi_3 \lambda_3^n) + \dots = \\ c_1 \varphi_1 e^{\lambda_1} + c_2 \varphi_2 e^{\lambda_2} + c_3 \varphi_3 e^{\lambda_3} \quad (6)$$

而由式(2)所表示的三阶反对称矩阵的特征值和特征向量是容易求出的,可表示为

$$\lambda_1 = -i\theta, \quad \lambda_2 = i\theta, \quad \lambda_3 = 0 \quad (7a)$$

$$\varphi_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 + \theta_1^2 \\ \theta_1 \theta_2 + \lambda_1 \theta_3 \\ \theta_1 \theta_3 - \lambda_1 \theta_2 \end{bmatrix}, \quad \varphi_2 = \begin{bmatrix} \lambda_2^2 + \theta_1^2 \\ \theta_1 \theta_2 + \lambda_2 \theta_3 \\ \theta_1 \theta_3 - \lambda_2 \theta_2 \end{bmatrix}, \quad \varphi_3 = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} \quad (7b)$$

其中 $\theta = (\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2)^{1/2}$

定义矩阵

$$\Phi = [\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3] \quad (8)$$

则系数向量 C 可表示为

$$C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \Phi^{-1} r \quad (9)$$

代入式(6)可将式(6)改写成

$$r' = T r \quad (10)$$

虽然所有的 c_i, λ, φ 均在复数域内取值,但矩阵 T 一定是一个实系数矩阵,它表示从矢量 r 到矢量 r' 的一个转动,是可以有限形式精确地写出来的。式(5)~(10)构成了一组精确地描述有限转动的公式。

2 有限转动公式在二维梁的有限变形理论中的应用

选取 x 轴为二维梁初始位形的中轴线, y 轴沿横截面的主方向。对于任意点 $B(x, y)$,选取相应的参考点 $A(x, 0)$,使线段 AB 符合在有限变形过程中保持刚性直线段的基本假设。现在来研究有限转动理论的具体应用。矩阵 Θ 中 $\theta_1 = \theta_2 = 0$,此时 Θ 退化

$$\Theta = \begin{bmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{bmatrix}$$

其中 $\theta = \theta_3$ 。特征方程为

$$\lambda^2 + \theta^2 = 0$$

它的 2 个根分别为

$$\lambda_1 = -i\theta, \quad \lambda_2 = i\theta$$

相对应的特征向量为

$$\varphi_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \theta \end{bmatrix}, \quad \varphi_2 = \begin{bmatrix} \lambda_2 \\ \theta \end{bmatrix}$$

由式(9)可具体求出

$$c_1 = (x\theta - y\lambda_2) / (\lambda_1\theta - \lambda_2\theta)$$

$$c_2 = (\lambda_1 y - x\theta) / (\lambda_1\theta - \lambda_2\theta)$$

代入式(6), 并比较实部与虚部, 最后可得出

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (11)$$

这就是式(10)在二维梁问题中的具体表达。在文[11]中令

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}$$

就得到了线段 A_1B_1 在有限转动后的表示式

$$\mathbf{r}' = \begin{bmatrix} -y\sin\theta \\ y\cos\theta \end{bmatrix}$$

3 有限转动公式在板壳有限变形理论中的应用

选取 xy 平面为板壳初始位形中的中性面, z 轴为法线方向, 则任意点 $B(x, y, z)$ 的对应参考点 A 可选取为 $(x, y, 0)$ 。板壳理论的基本假设是: 中性面法线在有限变形过程中保持为刚性直线, 符合前面的假设。令 $\theta_3 = 0$, 则矩阵 Θ 退化成

$$\Theta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \theta_2 \\ 0 & 0 & -\theta_1 \\ -\theta_2 & \theta_1 & 0 \end{bmatrix}$$

其相应的特征值与特征向量为

$$\lambda_1 = -i\theta, \quad \lambda_2 = i\theta, \quad \lambda_3 = 0$$

其中 $\theta = (\theta_1^2 + \theta_2^2)^{1/2}$ 。相应的特征向量为

$$\varphi_1 = \begin{bmatrix} \theta_2 \\ -\theta_1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix}, \quad \varphi_2 = \begin{bmatrix} \theta_2 \\ -\theta_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad \varphi_3 = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

由式(5)和(9)得

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{bmatrix} = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + c_3\varphi_3$$

可求得

$$C = \Phi^{-1}r = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{bmatrix} z \\ -z \\ 0 \end{bmatrix}$$

有限转动公式(6)和(10)就表示成

$$r' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = c_1 \varphi_1 e^{-\theta} + c_2 \varphi_2 e^{\theta} = \begin{bmatrix} z\theta_2 g \\ -z\theta_1 g \\ z\cos\theta \end{bmatrix} \quad (12)$$

其中函数 g 定义为

$$g = \begin{cases} 1 & \text{当 } \theta = 0 \\ \sin\theta/\theta & \text{当 } \theta \neq 0 \end{cases}$$

令

$$U_A = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}, U_B = \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix}$$

U_A 是板壳中性面上点的位移, U_B 是其法线上任意点的位移。由式(12)可写出

$$\begin{aligned} U &= u + z\theta_2 g \\ V &= v - z\theta_1 g \\ W &= w + z(\cos\theta - 1) \end{aligned}$$

在给出板壳结构的拉格朗日应变之前,指出下述关系将是十分有用的:

$$\left. \begin{aligned} \theta\theta_{,x} &= \theta_1\theta_{1,x} + \theta_2\theta_{2,x} \\ \theta\theta_{,y} &= \theta_1\theta_{1,y} + \theta_2\theta_{2,y} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$$g_{,x} = \begin{cases} 0 & \text{当 } \theta = 0 \\ \theta_{,x}(\cos\theta - g)/\theta & \text{当 } \theta \neq 0 \end{cases} \quad (14)$$

$$g_{,y} = \begin{cases} 0 & \text{当 } \theta = 0 \\ \theta_{,y}(\cos\theta - g)/\theta & \text{当 } \theta \neq 0 \end{cases} \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned} (\theta_1 g)_{,x}\theta_{1,g} + (\theta_2 g)_{,x}\theta_{2,g} - \theta_{,x}\cos\theta \sin\theta &= 0 \\ (\theta_1 g)_{,y}\theta_{1,g} + (\theta_2 g)_{,y}\theta_{2,g} - \theta_{,y}\cos\theta \sin\theta &= 0 \end{aligned} \right\}$$

式(13)和(14)可由定义直接求导得出。式(15)只要展开也是容易得出的,为节省篇幅就不再详细证明。

利用上述关系,再经过一系列烦琐但简单的微分与合并同类项等运算,最后可得到以下的板壳结构有限变形的拉格朗日应变表达式:

$$\begin{aligned} E_{xx} &= U_{,x} + \frac{1}{2}(U_{,x}^2 + V_{,x}^2 + W_{,x}^2) = \\ &u_{,x} + \frac{1}{2}(u_{,x}^2 + v_{,x}^2 + w_{,x}^2) + \\ &z[(1 + u_{,x})(\theta_2 g)_{,x} - v_{,x}(\theta_1 g)_{,x} - w_{,x}\theta_{,x}\sin\theta] + \\ &\frac{1}{2}z^2[\theta_{,x}^2 \sin^2\theta + (\theta_1 g)_{,x}^2 + (\theta_2 g)_{,x}^2] \quad (16a) \\ E_{yy} &= V_{,y} + \frac{1}{2}(U_{,y}^2 + V_{,y}^2 + W_{,y}^2) = \end{aligned}$$

$$v_{,y} + \frac{1}{2}(u_{,y}^2 + v_{,y}^2 + w_{,y}^2) + z[u_{,y}(\theta_2 g)_{,y} - (1 + v_{,y})(\theta_1 g)_{,y} - w_{,y}\theta_{,y}\sin\theta] + \frac{1}{2}z^2[\theta_{,y}^2\sin^2\theta + (\theta_1 g)_{,y}^2 + (\theta_2 g)_{,y}^2] \quad (16b)$$

$$E_{zz} = W_{,z} + \frac{1}{2}(U_{,z}^2 + V_{,z}^2 + W_{,z}^2) = 0 \quad (16c)$$

$$E_{xy} = U_{,y} + V_{,x} + U_{,x}U_{,y} + V_{,x}V_{,y} + W_{,x}W_{,y} = u_{,y} + v_{,x} + u_{,x}u_{,y} + v_{,x}v_{,y} + w_{,x}w_{,y} - z[(\theta_1 g)_{,x} - (\theta_2 g)_{,y} - u_{,x}(\theta_2 g)_{,y} - u_{,y}(\theta_2 g)_{,x} + v_{,x}(\theta_1 g)_{,y} + v_{,y}(\theta_1 g)_{,x} + W_{,x}\theta_{,y}\sin\theta + W_{,y}\theta_{,x}\sin\theta] + z^2[(\theta_1 g)_{,x}(\theta_1 g)_{,y} + (\theta_2 g)_{,x}(\theta_2 g)_{,y} + \theta_{,x}\theta_{,y}\sin^2\theta] \quad (16d)$$

$$E_{xx} = U_{,x} + W_{,x} + U_{,x}U_{,x} + V_{,x}V_{,x} + W_{,x}W_{,x} = (1 + u_{,x})\theta_2 g - v_{,x}\theta_1 g + w_{,x}\cos\theta \quad (16e)$$

$$E_{yy} = W_{,y} + V_{,y} + U_{,y}U_{,y} + V_{,y}V_{,y} + W_{,y}W_{,y} = u_{,y}\theta_2 g - (1 + v_{,y})\theta_1 g + w_{,y}\cos\theta \quad (16f)$$

式(16)完整地表达了板壳有限变形理论的主要成果。

应提起注意的是剪切常数 G 的正确选取问题。 E_{xx} , E_{yy} 和与其对应的克希霍夫剪应力 S_{xx} , S_{yy} 之间应满足

$$S_{xx} = G_{xx}E_{xx}$$

$$S_{yy} = G_{yy}E_{yy}$$

考虑到刚性线段条件,应令 $G_{xx} = G_{yy} = E/2$ 。而 E_{xy} 和与其对应的克希霍夫剪应力 S_{xy} 之间仍应满足

$$S_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}E_{xy}$$

其中 $\nu \neq 0$ 。这些微小的差别是所有研究文章与教科书均未曾注意到的。其他 2 个应变分量 E_{xx} , E_{yy} 和与其对应的克希霍夫应力 S_{xx} , S_{yy} 之间仍如通常所述,因此板壳的有限变形弹性理论的本构关系为

$$\begin{bmatrix} S_{xx} \\ S_{yy} \\ S_{xy} \\ S_{xy} \\ S_{xx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 & D_2 & 0 & 0 & 0 \\ D_2 & D_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{E}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{xx} \\ E_{yy} \\ E_{xy} \\ E_{xy} \\ E_{xx} \end{bmatrix} \quad (17)$$

其中 $D_1 = E/(1-\nu^2)$, $D_2 = \nu D_1$, $G = E/[2(1+\nu)]$ 。

对克希霍夫应力沿板厚积分可得到板壳结构的克希霍夫内力

$$\left. \begin{aligned}
 M_{xx} &= \int_{-h/2}^{h/2} z S_{xx} dz \\
 M_{yy} &= \int_{-h/2}^{h/2} z S_{yy} dz \\
 M_{xy} &= \int_{-h/2}^{h/2} z S_{xy} dz \\
 Q_y &= \int_{-h/2}^{h/2} S_{yx} dz \\
 Q_x &= \int_{-h/2}^{h/2} S_{zx} dz \\
 Q_{xy} &= \int_{-h/2}^{h/2} S_{xy} dz \\
 N_x &= \int_{-h/2}^{h/2} S_{xx} dz \\
 N_y &= \int_{-h/2}^{h/2} S_{yy} dz
 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

由式(16)~(18)可导出板壳有限变形理论中描述位移与内力之间关系的全部平衡方程,这些方程虽然很重要,但由以上 3 式不难推导出来。

为了求解板壳有限变形问题,一个最强有力的工具就是有限元方法,利用以上结果,仿照文[11]的方法,不难得出全部有限元列式。这将在另文中给出。

4 结 论

从运动分析观点出发抽象出梁板壳这类带转角结构的共同的运动学特征,统一地作出了有限变形运动分析,由此重新推导出有限转动公式,第一次从矩阵特征值理论出发成功地克服了用无穷多微小转动来描述有限转动的困难,给出了有限转动矩阵的精确使用方法,在此基础上建立起全部、完整的有限变形理论。以二维梁为特例验证了公式的正确性。利用以上理论推导出板壳有限变形的精确方程,便可用板壳有限变形方程来替代 von-Karman^[12,13]薄板大挠度方程。

附录 关于公式(4d)的证明

给定微分方程的矢量形式

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{A}}{dt} \mathbf{r}$$

定义

$$e^{-\mathbf{A}} = \mathbf{I} - \mathbf{A} + \frac{1}{2!} \mathbf{A}^2 - \frac{1}{3!} \mathbf{A}^3 + \dots$$

$$e^{\mathbf{A}} = \mathbf{I} + \mathbf{A} + \frac{1}{2!} \mathbf{A}^2 + \frac{1}{3!} \mathbf{A}^3 + \dots$$

则有

$$e^{-\mathbf{A}} \cdot e^{\mathbf{A}} = e^{\mathbf{A}} \cdot e^{-\mathbf{A}} = \mathbf{I}$$

原微分方程的两边均乘以 $e^{-\mathbf{A}}$, 得

$$e^{-A} \frac{dr}{dt} = e^{-A} \frac{dA}{dt} r$$

$$\therefore \frac{d(e^{-A})}{dt} = -e^{-A} \frac{dA}{dt}$$

$$\therefore \frac{d}{dt}(e^{-A} r) = e^{-A} \frac{dr}{dt} - e^{-A} \frac{dA}{dt} r = 0$$

由此可积分得到

$$e^{-A} r = r_0$$

即
$$r = e^A r_0$$

以上证明由赵作善提供。

参 考 文 献

- 1 Argyris J, et al. Finite element method -- the natural approach. *Comp Meth Appl Mech Eng*, 1979, 17/18: 1~106
- 2 Argyris J. Nonlinear finite element analysis of elastic systems under nonconservative loading natural formulation. Part I: Quasistatic problems. *Comp Meth Appl Mech Eng*, 1981, 26: 75~123
- 3 Argyris J. An excursion into large rotations. *Comp Meth Appl Mech Eng*, 1982, 32: 85~155
- 4 Argyris J, et al. A simple theory of geometric stiffness with application to beam and shell problems. 2nd Int Symp Comp Meth Appl Sci & Engng Versatiles, Univ of Stuggart, France, 1975. ISD-Report No183
- 5 Dvorkin E N, et al. On the nonlinear formulation for curved Timoshenko beam elements considering large displacement/rotation increments. *Int J Numer Meth Eng*, 1988, 26: 1597~1613
- 6 Cardona A, et al. A beam finite element nonlinear theory with rotation. *Int J Numer Meth Eng*, 1988, 26: 2103~2438
- 7 Hsiao K M, et al. A corotational procedure that handle large rotations of spatial beam structures. *Comp Meth Appl Mech Eng*, 1987, 27: 769~781
- 8 Crisfield M A. Corotational beam element for two and three dimensional nonlinear analysis. IUTAM/IACN Symp Vienna, Austria, 1989
- 9 Crisfield M A. A consistent corotational formulation for nonlinear three dimensional beam elements. *Comp Meth Appl Mech Eng*, 1990, 81: 131~150
- 10 Crivelli L A, et al. A three dimensional nonlinear Timonshenko based on the corecongruent formulation. *J Comp Meth Appl Eng*, 1993, 36(21): 1189~1221
- 11 李明瑞. 梁的有限变形完整理论及有限元列式. *中国农业大学学报*, 1996, 1(2): 7~16
- 12 von-Karman T, et al. The buckling of spherical shells by external pressure. *J A Sci*, 1939, 7(43)
- 13 Chien Wei-zang. Large deflection of a circular clamped plate under uniform pressure. *Chinese J of Physics*, 1947, 7(2): 102~113